Publié dans Interactions didactiques 12, 1-98, 1991
qui doit être utilisé pour toute référence à ce travail

**4èmes JOURNEES ANNUELLES D'ETUDE
du CENTRE D'OBSERVATION ET
D'EXPERIMENTATION DIDACTIQUES (COED)**

"LES DEBUTS D'UN APPRENTISSAGE"

•Laboratoire de psychologie U.A. 182 du CNRS, Université de Provence
•I.R.E.M. d'Aix-Marseille
•Faculté des sciences de Luminy
•Lycée Marseilleveyre

Marseille, juin 1990

INTERACTIONS DIDACTIQUES

No 12

Mai 1991

Didactique des mathématiques
Psychologie sociale de l'éducation
FAPSE-Université de Genève
24 Général Dufour
1211 Genève 4 (Suisse)

Séminaire de Psychologie
Faculté des Lettres
Université de Neuchâtel
1 Espace Agassiz
2000 Neuchâtel (Suisse)

TABLE DES MATIERES

PRESENTATION DU CAHIER

Ce numéro de "INTERACTIONS DIDACTIQUES" rend compte de la suite des débats[1] des journées du **Centre d'Observation et d'Expérimentation Didactiques** de Marseille (Laboratoire de psychologie U.A 182 du CNRS, Université de Provence; IREM d'Aix-Marseille; Faculté des sciences de Luminy, Lycée Marseilleveyre).

La journée du 3 mai 1990 a été consacrée à la problématique des "débuts d'un apprentissage". Ce séminaire de recherche a pris la forme de quatre exposés suivis d'un débat animé par quelques discutants.

INTERACTIONS DIDACTIQUES propose ici les quatre exposés uniquement. En revanche les diverses interventions des discutants (C. Blanchard-Laville, J.J. Dupin, A. Mercier. G. Ricco, M.L. Schubauer-Leoni et M.J. Perrin) n'ont pas pu être prises en compte.

M.L. S.L.
mai 1991

[1] Les travaux des trois premières journées ont été publiés dans INTERACTIONS DIDACTIQUES nos 8.9 et 11.

L'APPRENTI, L'ERREUR ET LE SYSTEME

Par René Amigues
CREPCO/CNRS
Université de Provence

Pour étudier l'activité cognitive individuelle d'un "sujet", un psychologue s'arrange en général pour isoler au mieux son "sujet" de toute influence qu'il ne peut contrôler ou dont il ne peut rendre compte. L'intérêt porté au "sujet" l'amène le plus souvent à le considérer comme un "système isolé"; coupé de son environnement. Le laboratoire est le lieu qui répond le mieux à ces exigences. Lorsqu'on veut prendre en compte les conditions écologiques de production des réponses, le laboratoire permet de reproduire artificiellement les "effets de contexte" afin de les contrôler.

Un psychologue qui s'intéresse au fonctionnement cognitif d'un élève en situation didactique doit élargir son champ d'investigation au système didactique dans lequel cet élève apprend. En d'autres termes l'éclairage privilégié de l'élève ne peut se faire d'un seul point de vue sans risquer d'obscurcir les autres sous-systèmes -le professeur et le savoir-enseigné et, au-delà, le travail de l'institution- par l'ombre portée de l'élève. Ici, la notion de contexte, qui témoigne de l'indigence de nos modes d'approches habituels, ne peut jouer sa fonction palliative, car les sous-systèmes sont tous, a priori, d'égale importance pour définir un objet d'étude; même si, au bout du compte, un sous-système particulier est privilégié. D'ailleurs vous vous rendrez compte que l'ordre de présentation adopté dans cet exposé est quasiment l'inverse de celui de mes préoccupations.

Actuellement, la recherche de points de repères qui permettraient de délimiter les sous-systèmes ainsi que la définition des critères susceptibles de dégager la pertinence de leurs relations constituent un véritable chantier. Aussi, mon exposé portera sur des réflexions actuelles que me suggère ce travail et non pas sur des propositions théoriques achevées.

Cette présentation visera d'autant moins l'exhaustivité que j'ai privilégié un angle d'attaque: *le repérage de l'erreur*. Pourquoi ce choix? Tout d'abord, parce que l'erreur peut être considérée ici comme une source d'information sur le système dans lequel elle se produit. Ensuite, parce que "la production d'une erreur (...) fait toujours intervenir les conditions internes et externes à l'individu" (Leplat, 1988, p. 158).

1. L'emprise de l'institutionnel sur l'apprentissage

Du point de vue du sens commun l'apprentissage est une activité individuelle généralement considérée comme un résultat exclusivement imputable à un individu; avec un avant "le non-savoir", un après "le savoir" et entre ces deux états, la motivation, l'effort, la volonté, l'attention ou le sérieux de l'apprenant, etc. Du point de vue psychologique, on peut dire que l'apprentissage est avant tout une affaire privée, c'est-à-dire que le processus d'intériorisation est d'ordre intra-individuel. Toutefois l'apprentissage scolaire *est d'abord* une entreprise sociale. Dès lors, "les débuts de l'apprentissage" concernent uniquement l'apprenant. Il est clair en effet qu'il n'y a de nouveauté, de réel début que pour l'apprenti qui, d'une certaine façon, ne cesse d'être un débutant: le métier d'élève est constamment jalonné de "nouveaux départs", son apprentissage n'est jamais totalement achevé. Aussi il conviendrait de considérer l'apprentissage comme un enchaînement de passages successifs plutôt que de vouloir à tous prix chercher à fixer son origine et sa fin. Il s'agit vraisemblablement d'un point de vue singulier aux yeux d'une institution scolaire dont l'emprise se traduit notamment par l'évaluation d'un état initial (les pré-requis, les pré-acquis) et d'un état final, à travers la définition des objectifs et des référentiels. Je reviendrai plus loin sur ce point caractéristique de l'emprise sociale. Pour l'instant, rappelons simplement que les contenus et les modalités de ces apprentissages sont fixés avant même que l'apprenti ne s'engage dans l'activité. A l'école, l'apprenti ne choisit ni ce qu'il va apprendre ni les conditions dans lesquelles il va apprendre. Les contenus et les modalités de son apprentissage sont fixés de l'extérieur par son environnement immédiat, le professeur dans la classe; mais aussi par son environnement plus lointain: les programmes, les instructions. Ces derniers fixent *officiellement* les conditions de l'apprentissage ainsi que sa gestion. Cette dernière se traduit, selon moi, par deux fonctions: la première concerne les choix des procédés pédagogiques de transmission des connaissances et la seconde concerne la régulation des erreurs. J'avance ici que ces deux fonctions sont à la fois limitées et subordonnées aux objectifs institutionnels. Les modes d'intervention ainsi que les moyens de détection, de correction des erreurs sont moins diversifiés qu'on le croit et leur choix est largement prédéfini par les objectifs. J'appelle interventions pédagogiques institutionalisées ces actes pédagogiques qui mettent en scène et règlent les apprentissages.

On pourra m'objecter cependant que le professeur dispose d'une marge de manoeuvre suffisante pour lui permettre de faire fonctionner sa classe comme il l'entend. Il peut, voire même il est tenu de, prévoir une progression, enchaîner des séquences, etc. Ce n'est pas exclu! Mais pour que cela soit vrai il faudrait que le niveau organisationnel, qui conçoit les programmes, et le niveau fonctionnel, la classe dans laquelle ils sont traduits et mis en jeu, soient bien distingués et entretiennent des rapports dialectiques. Au niveau organisationnel, la conception des programmes repose sur des objectifs éducatifs qui orientent le contenu des apprentissages. Au niveau fonctionnel l'enseignant choisit des exercices, détermine le matériel, élabore des situations-problèmes; bref il décide des supports de l'apprentissage d'une connaissance eu égard aux objectifs institutionnels. Dans ce cas de figure, où les choses iraient de façon normale, on pourrait envisager l'existence d'une marge de manoeuvre concernant le choix des moyens à mettre en oeuvre et leur régulation. En revanche, cette dernière n'existe plus lorsque les discours du niveau organisationnel et du niveau fonctionnel sont *confondus*. C'est ce que je vais tenter de montrer à travers l'usage actuel des référentiels.

Les référentiels définissent des "objectifs-capacités", des "compétences"cibles. Je ne discuterai pas ici du bien fondé de ces objectifs ni des conditions ou des références utilisées (théoriques, méthodologiques, pratiques) pour les définir. Je voudrai montrer que le problème réside dans la confusion qui est faite entre les objectifs d'évaluation et les objectifs d'apprentissage, entre les "outils d'évaluation" et les "outils de formation". Les référentiels qui devraient constituer une référence, une grille d'analyse par exemple, constituent de fait un véritable outil de programmation de la gestion de la classe et de la systématisation des "bonnes procédures" que les élèves doivent mettre en jeu pour atteindre les performances fixées. Les référentiels sont conçus comme des outils de formation des élèves pour les professeurs. Ils utilisent ainsi des "outils tout faits" conçus à l'extérieur du processus de formation lui-même. Cette fonction est d'ailleurs présentée comme un avantage dans la littérature pédagogique qui traite de la formation des maîtres; certains auteurs se laissent aller à rêver que le "Bulletin Officiel" puisse être "conté sous forme de référentiel". Dans la littérature psycho-pédagogique les référentiels sont présentés comme indispensables pour concevoir des "dispositifs pédagogiques favorisant la réussite". A l'unisson le projet pratique est très clair, même si en théorie l'analyse fait défaut: il s'agit d'organiser matériellement les situations pédagogiques et de prévoir l'ensemble des difficultés des élèves de façon à réduire l'émergence d'erreurs. Ces dernières seraient susceptibles d'affecter la trajectoire des élèves et, par là-même, l'atteinte des objectifs. A cet égard on remarquera que la marge de manoeuvre revendiquée par les professeurs, au nom de leur singularité, se traduit par une unicité dans la mise en oeuvre. Nous sommes confrontés ici à deux discours conscients et contradictoires et, qui cependant, cohabitent et se superposent dans la mise en acte. Nous ne sommes pas confrontés à un "acte manqué" ou à un "lapsus" mais bel et bien à une *confusion.*

On savait déjà que l'institution déterminait le "savoir-enseigné" de façon autonome au "savoir-savant" (cf. Y. Chevallard, 1989). Mais on peut se demander dans quelle mesure cette pratique empirique, telle qu'elle est rationalisée, ne développe pas un "savoir-faire-enseigné" indépendant de tout "savoir-enseigné"? Que devient le "savoir-enseigné" lorsque l'élève doit uniquement apprendre des procédures correspondant à des objectifs définis en termes de compétences cognitives? Quel rapport au savoir instaure-t-on dès lors que la conception de dispositifs pédagogiques vise le développement de "stratégies générales"? (au passage notons l'orientation donnée au type d'erreur repérable). L'apprentissage de connaissances mathématiques, biologiques, etc. se ramène à l'acquisition d'un "savoir procédural" dont la caractéristique serait d'être transférable non seulement dans les différentes disciplines scolaires mais aussi dans les situations de la vie quotidienne. Il s'agit bien sûr d'une vue de l'esprit, d'une "visée folle" qui témoigne du caractère intrinséquement paradoxal de la notion d'objectif, à savoir: un projet à maîtriser et une visée jamais atteinte. Personne ne miserait sur une entreprise qui utilise les mêmes outils pour évaluer un résultat et pour apprécier les procédés par lesquels ces résultats sont atteints. Dans cette entreprise les apprentissages ne sont pas sans rappeler certains aliments pré-contraints et conservés sous vide: ils ont tous le même gôut! En dépit des arguments novateurs et techniques des concepteurs de dispositifs pédagogiques, je tenterai de montrer (cf. point 4) que la confusion entre objectif d'évaluation et objectif d'apprentissage tend à renforcer l'apprentissage par coeur, l'apprentissage par algorithme, au détriment de l'apprentissage du sens. Cette conception moderniste des technologies éducatives se trouve explicitement présentée dans l'enseignement assisté par ordinateur. L'argument de vente que les concepteurs et développeurs mettent en avant est la "qualité" du produit. Cette dernière repose sur "le mariage de la technique informatique et d'objectifs pédagogiques précis" (sic!).

C'est dans ce cadre institutionnel, où le discours organisationnel et fonctionnel sont pas distingués que s'exerce l'intervention pédagogique institutionalisée. La façade organisationnelle absorbe ce "bon sens", "ce qui-va-de-soi-pour-assurer-le-bon-fonctionnement" et réinjecte cette logique dans le déroulement programmatique de l'apprentissage dans la classe. C'est dans ce cadre que le processus d'apprentissage est emmuré et vérrouillé. C'est aussi selon cette logique que l'erreur sera détectée, que son statut et sa fonction seront fixés. A ce titre, elle constitue une source d'information particulièrement riche sur le fonctionnement du système dans lequel elle se produit.

2. Analyse des situations d'enseignement

Pour étudier des situations d'enseignement, dans le but d'observer ou d'expérimenter, j'utilise fréquemment les techniques dont se servent les psychologues du travail pour analyser des situations professionnelles, des situations non-conçues par l'expérimentateur. Je voudrais rapidement vous en présenter les caractéristiques essentielles.

Les psychologues du travail (Leplat & Pailhous, 1978; Leplat & Hoc, 1983) distinguent l'analyse de *la tâche* de l'analyse de *l'activité*. Aucune de ces deux analyses n'est réductible à l'autre et, l'une ne peut pas se mener indépendamment de l'autre; c'est donc de façon dialectique que ces deux analyses doivent être menées.

L'analyse de la tâche consiste à dégager les contenus sur lesquels portent l'activité. L'analyse de l'activité consiste à décrire la façon dont les sujets prennent en compte ces contenus pour réaliser la tâche. Ainsi, les difficultés des élèves s'interprètent en référence à l'analyse qu'on a pu faire des propriétés des contenus qui constituent le support de l'activité. Par exemple on peut apprécier les contenus effectivement pris en compte et ceux supposés traités par les élèves.

L'analyse de la tâche permet d'orienter l'observation ou la formulation d'hypothèses relatives à la nature de l'activité de traitement des contenus. Par exemple à propos de la représentation que les élèves se font des conditions de mises en oeuvre de certaines règles ou procédés pour traiter tel ou tel contenu.

Partant, il est important de préciser quelques points essentiels pour notre discussion.

-1) On notera que la *pertinence* de l'analyse de l'activité dépend de la *qualité* de l'analyse de la tâche qu'on a pu faire. Par exemple, dans les situations de travail, l'analyse de la tâche qui définit les conditions nécessaires à l'exécution de l'action, est extrêmement importante pour proposer des améliorations concernant la charge mentale des sujets, l'interaction entre un opérateur et le dispositif symbolique ou matériel qu'il manipule, ou encore fournir des informations relatives à des contenus de formation.

-2) Ce n'est pas parce que l'analyse de la tâche indique les *conditions nécessaires* dans lesquelles les contenus doivent être pris en compte pour résoudre un problème, qu'elle peut prédire comment les sujets doivent s'y prendre. Les auteurs s'attachent fortement à souligner que l'analyse de la tâche *ne peut en aucun cas constituer un modèle prescriptif de l'activité.* C'est la raison pour laquelle ils distinguent la tâche *prescrite*, celle conçue par le constructeur, l'enseignant..et la tâche *effective*, celle effectivement réalisée par le sujet.

-3) L'analyse de la tâche ne tient pas compte de ce que le sujet *sait déjà ou ne sait pas*. Par exemple lorsqu'on propose un problème rien n'est dit sur le fait qu'un élève sache résoudre en partie ce problème tandis qu'un autre soit un authentique débutant. Par conséquent, la tâche ne peut pas prédire, pas plus qu'elle ne peut constater, ce que le sujet doit ou va apprendre. Ainsi, ce n'est pas parce que ces deux élèves empruntent le même parcours qu'ils ont effectivement appris les mêmes choses.

-4) La distinction tâche-activité et tâche prescrite-tâche effective conduit à une autre distinction: *le but prescrit ne correspond pas nécessairement au but poursuivit par le sujet*. Dans la recherche en didactique la finalisation de l'activité de l'élève constitue un problème de taille. Elle constitue notamment un obstacle à la "dévolution du problème à l'élève"; et cet obstacle ne peut être levé par l'énonciation du but prescrit. Ce n'est pas parce qu'on explicite à un élève quel est le but à atteindre qu'il se finalisera effectivement sur ce but. Les enseignants savent bien d'ailleurs que la communication du but de l'exercice aux élèves ne permet pas à ces derniers de se le représenter de façon précise et de l'atteindre systématiquement.

Le constraste est particulièrement saisissant entre l'approche ergonomique et l'approche pédagogique, que nous allons examiner maintenant.

3. De l'absence de génie pédagogique

Dans les tâches pédagogiques ces distinctions ne sont pas faites ou ne peuvent pas l'être par les professeurs. Certes, ces derniers ne sont pas ergonomes mais, au-delà, la différence porte sur les buts, les conditions et surtout sur le poids des contraintes qui pèsent sur la conception des exercices. Leur marge de manoeuvre est d'autant plus réduite que les conseils avisés de "l'Inspection" ou ceux prodigués par la littérature spécialisée invitent les professeurs à utiliser des dispositifs pédagogiques dans lesquels la tâche prescrite constitue bel et bien le modèle de l'activité de l'élève. Les référentiels sont là pour ça! Ce type de situation illustre manifestement la confusion entre les niveaux organisationnel et fonctionnel dont le travail consiste à perdre de vue les points de repères respectifs; le produit de ce travail, comme on le verra dans le point suivant, réside dans l'absence de repères précis pour concevoir et gérer l'apprentissage.

Pour un ergonome la tâche est un ensemble de contraintes et de conditions de réalisation associées à des contenus particuliers. Pour le pédagogue la tâche est conçue en référence au fonctionnement idéal de l'élève ou de l'élève idéal (je reviendrai plus loin sur ce "psychologisme") qui serait capable de reproduire, d'une façon immédiate et mécanique, une solution telle qu'elle a été pensée par un "expert". Cela est particulièrement net dans les dispositifs d'enseignement de la technologie où la "démarche de projet technique", héritée de la pratique du technicien, est mise en avant. Mais c'est aussi vrai pour d'autres disciplines dans lesquelles les techniques procédurales d'atteinte de but ou d'obtention de la réponse attendue sont moins manifestes. La tâche est conçue comme un modèle de l'activité de l'élève et, pour ce dernier, sa tâche consiste à repérer l'ensemble des prescriptions à partir desquelles il donnera sa réponse. L'hypothèse pédagogique ici est double : d'un côté l'élève poursuit nécessairement le but défini par le professeur; d'un autre côté, le but est atteint parce que l'élève a suivi la "bonne démarche". Du coup, l'exactitude d'une réponse résulte d'une démarche correcte tandis que l'inexactitude révèle une démarche erronnée.

Pour un ergonome, l'exactitude ou l'inexactitude du résultat ne permettent pas de détecter l'erreur. La bonne réponse ne permet pas de savoir si le sujet a vraiment travaillé sur la même base que celle utilisée par le constructeur. On peut parvenir à un même résultat en travaillant sur des bases différentes et l'exactitude de la réponse n'offre aucune garantie que la procédure suivie est conforme à celle attendue. L'inexactitude du résultat, de la même façon, ne renseigne en rien sur le but ou la procédure adoptés par le sujet. Or les interventions pédagogiques institutionalisées sont moins pondérées: l'écart entre le résultat attendu et celui réalisé par l'élève traduit l'existence d'une erreur qui doit être réduite. Un long travail de "rémédiation de l'erreur" s'engage alors pour rectifier une démarche ou améliorer une méthode qui permette d'atteindre le résultat attendu. C'est ce qu'on appelle la régulation par le résultat et on connait, notamment en psychologie, le faible effet qu'engendre ce type de régulation sur le fonctionnement. Cette insuffisance est vraisemblablement une des raisons pour lesquelles les interventions pédagogiques institutionalisées consistent le plus souvent à guider l'élève dans son exécution, au besoin en lui "soufflant" la bonne réponse. Que ce soit la régulation par le résultat ou le guidage de l'action de l'élève, l'association de ces deux types d'interventions témoigne à nouveau de la confusion réalisée entre les objectifs d'évaluation et les objectifs d'apprentissage. Du coup, les interventions pédagogiques institutionalisées ne sont pas en mesure de distinguer les moyens qui permettent d'évaluer la réussite et ceux utiliser pour évaluer la réalisation. Dès lors les interventions pédagogiques institutionalisées sont fort démunies pour effectuer un diagnostic correct des erreurs.

On voit bien ici les conséquences qu'entraine une telle confusion ainsi que les pièges abscons dans lesquels sombrent les pratiques pédagogiques: *si la détection sérieuse des erreurs n'est pas possible leur rémédiation ne l'est pas plus.* L'intention pédagogique, aussi généreuse et sympathique soit-elle, qui déclare vouloir aider les élèves à corriger leurs erreurs, demeure lettre morte. En outre, comme si ce n'était pas suffisant, à trop se centrer sur les objectifs pédagogiques à atteindre, le risque encouru est d'évacuer du dispositif pédagogique l'activité d'apprentissage dans laquelle on voulait engager les élèves. Ce constat, me direz-vous, est trop sévère et ne reflète pas la réalité des classes. Je redoute en effet qu'il ne s'agisse que d'un pâle reflet de la réalité des dispositifs pédagogiques que j'ai pu étudier. J'ai été frappé de constater que ces dispositifs, présentés comme devant assurer la formation de capacités intellectuelles de haut niveau et la réussite individuelle, présentent au mieux quelques "traces" d'apprentissage et placent quasi-systématiquement les élèves dans des situations de sous-fonctionnement cognitif. Cette conséquence semblera bien paradoxale et peu évidente aux yeux d'un praticien. Ce n'est pas étonnant si on veut bien considérer que le travail de la confusion consiste aussi à ce que les choses se passent à l'insu de celui qui les pratique.

On est loin de la conception du XVIIIe siècle qui présentait la pédagogie comme une "science pédagogique". La "science normative de l'éducation" qui s'appuierait sur les bases de la psychologie, de la physiologie, de l'histoire...pour éclairer et guider les gestes des pédagogues. Plutôt que de parler de science on emploierai aujourd'hui le terme "d'ingénierie pédagogique". Or, si le "génie pédagogique" n'existe toujours pas, comme nous le rappelle l'existence des "Sciences de l'Education", l'aspect "normatif"[2] perdure toujours; et cette pratique pédagogique apparait aujourd'hui avant tout comme *une pratique sociale.* Dans ce contexte, pratique peut être opposée à théorique, dans la mesure où le temps d'une "réflexion théorique" ne peut être pris (ni pris au sérieux)[3] car la "vérité" de la démarche pédagogique réside dans sa confrontation constante à la pratique. Le fonctionnement de la démarche pédagogique consiste à rechercher, dans sa propre pratique, "ce qui marche" et, puisque "ça marche", la confrontation théorique n'est pas nécessaire. C'est cet empirisme logique qui fait que les responsables et les acteurs pédagogiques sont constamment demandeurs "d'outils", de "recettes" qui auraient une valeur instrumentale immédiate. Cette "caisse à outils",

---

2 "science normative de l'éducation": normative dans le sens d'éclairer et de guider, par la science, la pratique des pédagogues. Or la référence à la "science" se limite aux emprunts faits aux sciences, notamment sociales comme la psychologie ou la sociologie. Ces emprunts sont limités aux valeurs véhiculées par les résultats de la recherche et non aux théories ou aux méthodes. C'est la référence à ces valeurs que l'Institution (ici responsables et praticiens) transforme en principe d'action et qui donne lieu, bien souvent, à des "distorsions".

3 Ce temps de "réflexion théorique" est considéré par l'institution comme du temps perdu! Les actions de recherche ou de formation qui ne débouchent pas immédiatement sur du "concret" sont inutiles et péjorées! Les premières sont trop "théoriques" et les secondes sont des "formations divan".

constituée par les produits d'une technologie éducative, fournirait ainsi les moyens de réduire l'écart entre les résultats réalisés par les élèves et les objectifs définis. L'action du pédagogue, pour reprendre le sens étymologique, est ainsi "asservie" aux objectifs institutionnels. Les gestes ritualisés sont pétris par les croyances et les préjugés des responsables et des praticiens, certes différentes selon leurs groupes sociaux d'appartenance, mais également structurés par les valeurs privilégiées par le système. C'est ce qui confère à la pratique pédagogique son unicité dans la mise en oeuvre des situations d'apprentissage.

4. Conceptualisations de l'apprentissage et mise en oeuvre

Le premier scénario consiste à proposer aux élèves des situations dans les quelles "ils voient" immédiatement ce qu'il convient de réaliser. Pour qu'ils n'aient pas de problème de compréhension les difficultés éventuelles sont anticipées de façon à ce qu'ils travaillent uniquement sur les données considérées essentielles par le professeur. Les élèves sont ainsi placés dans des situations prototypiques d'apprentissage dans lesquelles, à travers des exemples bien choisis, ils apprendront les "bonnes théories". Les concepts sont définis et présentés par le professeur, les expériences permettent de retrouver les résultats attendus. On enseigne uniquement les bonnes théories, celles dont on a montré qu'elles marchaient dans ces situations. Cette "monstration" (Johsua, 1985) est souvent pratiquée par le professeur et la démonstration rarement par l'élève. Ce dernier est ainsi engagé dans l'apprentissage d'un "savoir tout fait" qui consiste à apprendre par coeur l'algorithme -qui mime les gestes de construction de ce savoir- et la définition - qui apparaît comme seule réponse possible au problème. Ainsi, les erreurs peuvent porter sur la réponse finale ou sur la "démarche". Mais, dans les deux cas, la décision pédagogique susceptible d'améliorer l'activité de l'élève, repose sur une action consiste à comparer l'écart entre deux résultats: l'un attendu, l'autre produit par l'élève. Cette comparaison correspond à une action de contrôle. Il s'agit de "mesurer", "d'estimer" l'écart entre le produit réalisé par l'élève à une norme, à un gabarit, à un modèle à reproduire. C'est un contrôle normatif, un test de conformité et non pas une évaluation régulatrice. Ainsi, la régulation de l'activité de l'élève par les résultats ne peut que renforcer l'apprentissage par algorithme et l'apprentissage par coeur. Les explications "formatives", susceptibles d'engendrer une modification dans la démarche de l'élève ne peuvent opérer dans ce cadre. Les arguments scientifiques ou logiques du professeur se ramènent à un argument d'autorité du maître.

Dès lors L'erreur est repérable parce qu'elle n'emprunte pas les chemins déjà connus de la bonne procédure. Elle est conçue ici comme un "défaut" par rapport au modèle, comme des "ratés" au regard du fonctionnement d'une machine bien réglée. Le responsable de ces "faux-pas", qui affectent la démarche, ou le bon fonctionnement de la machine est l'inconscient. L'inconscient philosophique (et non psychanalytique) qui est universellement structuré par les catégories logiques. On retrouve ici le "sujet" cher à Descartes, qui d'ailleurs plaçait la logique au coeur de son épistémologie. Mais cette conception, ici de "l'élève-machine", est ancienne et présente dans la philosophie classique. Pour Aristote l'homme est un "animal doué d'une raison". Pour Pascal, nous sommes "automate autant qu'esprit". L'esprit renvoit aux raisons qu'il faut avoir vues au moins une fois dans sa vie, et l'automate, c'est à dire la machine, renvoie à la coutume, à l'habitude.

L'intention pédagogique, aussi généreuse et sympathique soit-elle, qui déclare vouloir aider les élèves à corriger leurs erreurs, demeure lettre morte.plus haut. Par exemple un jeune élève pense à haute voix ce qu'il est en train de réaliser et dit: "Ah non! Je m'ai trompé". La maîtresse intervient gentiment : "On ne dit pas je m'ai trompé, mais je me suis trompé!". Ce type d'intervention n'est pas exclusivement limité aux normes du langage. Il est très fréquent dans les situations où le maître veille à l'emploi correct de termes techniques qui sont, socialement, le signe d'une bonne compréhension. "On ne dit pas je branche mais je mets sous tension"... Or, des interventions de ce type engendrent différents effets. En premier lieu, bloquer le processus de recherche dans lequel s'engageait l'élève. En second lieu, éviter de prendre en compte la difficulté qu'engendre le problème pour l'élève. Du coup ce dernier ne peut la repérer comme telle. En troisième lieu, la rectification de la "faute" masque le repérage de l'erreur et son diagnostic. En effet, ce mode d'intervention ne permet pas de distinguer des erreurs fréquentes, mais transitoires parce que liées au début de l'apprentissage, des erreurs qui témoigneraient d'obstacles susceptibles de perdurer. Dans ces conditions le professeur se trouve piégé: le traitement pédagogique des erreurs est (un) compromis, et il y a méprise s'il pense pouvoir les maîtriser. En outre cette méconnaissance, fondée sur le culte du logique, occulte les obstacles cognitifs des élèves et les contraintes des situations liées à la spécificité des contenus à transmettre et à s'approprier.

L'autre conception est plus proche de ce qu'on peut connaître, ou du moins de ce que je connais, des situations de "modélisation". Il convient de noter ici qu'il ne s'agit pas d'une pratique pédagogique courante mais d'une pratique de recherche en didactique. Il n'est donc pas question de vouloir comparer deux pratiques ou de présenter un modèle salvateur susceptible de règler les dysfonctionnements d'un autre.

Dans ces situations, les concepts ne sont pas d'abord exposés et définis; le professeur ne fait pas de monstration. Le dispositif est conçu de façon à ce que les concepts soient construits en même temps que s'élabore la représentation de la situation proposée à l'élève. Elle est conçue pour poser à l'apprenant des problèmes tels que la connaissance visée apparaisse comme une solution optimale. Ces "concepts-outils" sont donc construits pour répondre à un problème. L'activité des élèves consiste à envisager différentes solutions et déterminer des critères de décision qui leur permettent de choisir celle qui est optimale. Au passage notons que, dans ces situations, le professeur s'efface, il n'intervient pas plus pour rectifier une réponse que pour guider les élèves dans l'exécution de la tâche.

Les moyens cognitifs mis en jeu par les élèves le sont *pour* la formulation d'un projet d'action, sa réalisation ainsi que l'évaluation des solutions possibles. Les connaissances ainsi produites ne sont pas limitées à la résolution d'un "exercice" ou à la réussite, mais prennent toute leur signification pour la réalisation de l'action. C'est dans un tel environnement cognitif qu'on peut réutiliser des connaissances antérieurement acquises, approfondir tel ou tel point...

La régulation de l'action ne se fait pas par les résultats attendus, mais par l'erreur nécessairement détectée et traitée par les élèves. Le raisonnement ou la procédure mis en jeu ne se font pas sur le modèle de la machine bien rodée, dont les erreurs seraient des ratés contingentes; de la même façon les erreurs ne relèvent pas d'une insuffisance de développement appréciée en termes de stades ou de logique. L'erreur est un produit inhérent à une activité problématique qui résulte de l'élaboration d'opérations par lesquelles l'élève se fait sujet de la question posée. Les erreurs reflètent donc les différentes tentatives que développe l'élève pour résoudre le problème.

Ces deux situations sont très contrastées du point de vue des conceptions de l'apprentissage sous-jacentes à sa mise en oeuvre et au statut de l'erreur. Dans la première, l'apprentissage se fonde, non pas sur "les choses de la logique, mais sur la logique des choses". Ce culte du logique, à la base de la pratique pédagogique, permet à cette dernière de fonctionner sur le mythe de la bonne progression, d'aller du simple au complexe, en comblant, chemin faisant et à chaque étape, les lacunes. L'apparition du logique immanent dans la pratique pédagogique exclut par là-même les conditions sociales de production du savoir, l'activité de construction de ce savoir et les contraintes des situations dans lesquelles elle se déroule. Cette mise en transparence des structures de formation rend plus visible les dysfonctionnements illicites de la mécanique individuelle. L'erreur est bien "dans la tête de l'élève", inhérente à son activité intellectuelle, à son développement cognitif. L'enseignement doit donc transmettre des connaissances en respectant "l'Enfant". Il est facile ici de reprendre la parodie selon laquelle lorsque l'enfant paraît l'élève disparaît.

L'autre situation, présente une approche fonctionnelle de l'apprentissage. C'est l'écologie de "ce qu'il y a à apprendre" qui fixe le statut de l'erreur dans son rapport à l'objet de connaissance. Dans ce cadre-là, elle n'a rien de pathologique et son traitement ne relève pas de remèdes à administrer selon une mise en scène propre à une tragédie pathétique.

Ces considérations révèlent en fait l'indigence et l'inadéquation des cadres théoriques psychologiques actuels à rendre compte de l'apprentissage chez l'enfant, chez l'élève, chez l'adulte. Il est également difficile aux chercheurs de se départir du culte du logique et d'échapper à l'emprise structuraliste. Cette absence de clarté épistémologique et théorique entraine une confusion qui produit un psychologisme qui conforte l'institution et se nourrit d'elle.

5. Psychologisme et pièges abscons

Le psychologisme ici, consiste à considérer le fonctionnement cognitif dans l'apprentissage comme relevant de la psychologie du développement. Dans d'autres termes, l'évolution dans chaque apprentissage pourrait être considérée comme une micro-génèse. Dès lors, les déficits cognitifs de la machine individuelle peuvent être règlés par une rémédiation qui utilise des outils logiques. De nombreux travaux en psycho-pédagogie développent ces conceptions aussi bien sur le terrain de la formation initiale que sur celui de la formation d'adultes.

Par exemple, dans la littérature sur la formation initiale d'élèves de 3ème et 4ème technologiques on relève que "la pédagogie de soutien vise (...) à compenser des *inégalités de développement entre enfants ...*" [4] à donner "aux élèves en difficulté les *outils intellectuels qui leur manquent*"[3]. Pour assurer la réussite de tous les enfants les dispositifs pédagogiques doivent être "propres à développer des capacités intellectuelles fondamentales, de raisonnement, de jugement, celles que tout *homme* [3] met en oeuvre dans n'importe quel savoir ou savoir-faire". Ces propos, imprégnés d'adultomorphisme, ne se trouvent pas dans les instructions officielles de l'institution mais dans un compte-rendu de recherche psycho-pédagogique. Ils font clairement référence à la psychologie du développement et à l'enfant. A cet égard, Vinh Bang (1989) nous rappelle, d'une part, que "la psychologie génétique n'est pas une méthode didactique. Elle ne dicte surtout pas une procédure d'enseignement" (p. 26) et, d'autre part, qu'on ne dispose pas d'une "psychologie de l'élève" (p. 12). Ces constats nous rappelle que la pédagogie n'est pas une application de la psychologie génétique. En revanche elle constitue, parmi d'autres, une référence susceptible d'éclairer le fonctionnement de l'élève. Toutefois, je ne suis plus tout à fait ce dernier auteur lorsqu'il avance que "C'est à travers la psychologie de l'enfant que l'on tire des informations pour comprendre l'élève..."(p.12) ni avec l'idée que c'est en "Se référant aux données de la psychologie génétique, (que) l'enseignant disposera de repères pour analyser son action dans une situation didactique. Il pourra prendre conscience du rôle du principal acteur, *l'élève qui est un enfant en développement*" [3] (p. 26-27). On notera le dérapage entre ces deux séries de propos qui met en évidence les pièges abscons que nous tend l'épistémologie piagétienne. Elle rend transparent, à travers le "modèle-de-l'élève-qui-apprend-est-un-enfant-qui-se-développe", le savoir-enseigné et l'enseignant. Elle nie le corps de savoir transmis au nom du "savoir scientifique" qu'il faudrait pouvoir

[4] Souligné par moi

transmettre en respectant l'enfant, dans son développement. Ainsi, le modèle élève-enfant (qui renvoie au fonctionnement d'un écolier) rendrait compte de formes générales de raisonnement d'un système isolé qui se développe logiquement selon une dynamique propre. Or, même dans un environnement didactique transparent, un modèle élève-enfant ne saurait à lui tout seul rendre compte de la génèse de l'appropriation du savoir-enseigné[5]. Nous retrouvons ici l'oubli des structures de formation qui constitue un moyen de mettre en cause la mécanique individuelle. Ainsi, pour révéler les potentialités logiques des élèves l'intervention didactique doit pouvoir assurer une bonne interaction sujet-tâche au moyen d'outils de médiation (de façon à éviter les erreurs), ou restaurer cette interaction au moyen d'outils de rémédiation (pour corriger les erreurs).

Les modes d'intervention sont quasiment identiques dans la formation initiale ou continue. D'ailleurs les techniques se propagent indifféremment d'une institution à l'autre: ce qui marche pour combler le déficit cognitif chez l'adulte marche aussi pour l'enfant et réciproquement! On perd la trace de l'origine de ces techniques, hâtivement présentées comme des théories cognitives, surtout par l'institution, dans le courant de "l'Educabilité de l'Intelligence", de "l'Education Cognitive". "Apprendre à apprendre" devient le meilleur moyen de restaurer les commandes logiques qui pilotent le fonctionnement de lamachine. Ces techniques, à l'instar du "Programme d'Enrichissement Instrumental" (P.E.I.) ou des "Ateliers de Raisonnement Logique" (A.R.L.), proposent des moyens de médiation et de rémédiation dans des champs théoriques encore en friche. Du coup, les principes d'intervention relèvent davantage d'une rationalisation de la mise en oeuvre que de propositions théoriques à proprement parler. Dans la pratique de formation ces techniques se développent sans contrôle de pertinence aux situations de formation ou d'apprentissage et en l'absence de validation empirique des effets. A nouveau, nous retrouvons l'empirisme rationalisé et le culte du logique. Par exemple, la pratique des A.R.L. vise la mise en place du raisonnement logique. Des adultes, en formation professionnelle, sont donc entraînés à raisonner logiquement sur des contenus neutres, épurés de toutes significations techniques et sociales liées aux situations de travail. L'espoir des formateurs réside dans l'idée que les sujets parviendront à raisonner

[5]On retrouve cependant cette conception avec les simulacres de "modèle de l'élève" que proposent les "tutoriels intelligents". Mais il est vrai que ces derniers révèlent à chaque pas ce que n'est pas l'intelligence.

rationnellement dans des situations réelles de travail. Ici la méconnaissance, évoquée plus haut, engendre le mépris à l'égard des personnes soumises à ce traitement: les "Bas niveaux de Qualification". Ce n'est pas l'effritement de l'emploi et les redéfinitions des secteurs professionnels qui rendent visible cette population - qui socialement a toujours existée et qui économiquement est vouée à la précarité- mais c'est leur déficit cognitif! Bien que les premiers constats démentent l'efficacité de ces techniques, l'institution, bon sens oblige, persiste à développer ce type d'action. Comme pour répondre à ce besoin institutionnel fleurissent toutes sortes de techniques cognitives de gestion mentale, dont les soubassements théoriques sont aussi visqueux qu'obscurs. Elles proposent un modèle universel de médiation-rémédiation et fournissent une description globale, somme toute bien banale, des modes d'intervention. Plutôt que de théorie, il conviendrait plutôt de parler de prophétie autoréalisatrice. Il y a là de quoi satisfaire pleinement l'institution qui, à l'instar d'une entreprise qui connaîtrait des problèmes de communication, ferait appel à un spécialiste du saut à l'élastique.

Ces réflexions permettent de rappeler que, contrairement aux idées reçues, l'apprentissage ne consiste pas à passer d'un état de non-savoir à un état ultime de savoir achevé susceptible d'être pleinement maîtrisé. En outre, elles montrent la nécessité d'étudier l'environnement ou "l'écologie" des objets de savoir enseignés afin de connaître sur quoi porte effectivement l'apprentissage. On notera ici que les recherches sur l'apprentissage témoignent de l'indigence des modèles psychologiques et de l'inadéquation des cadres théoriques actuels à en rendre compte. Dans ces conditions il n'est pas étonnant de voir, parce que peut-être plus ancienne, la recherche psycho-pédagogique se développer sur le terrain de la formation initiale et post-initiale. Mais je me demande si, en l'absence de clarté épistémologique et théorique suffisante, une recherche-action de ce type ne participe pas de ce psychologisme et si elle ne contribue pas au maintien de la confusion chez les formateurs et les responsables?

Références

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège- Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 45-75

Johsua, S. (1985). Contribution à la délimitation du contraint et du possible dans l'enseignement de la physique: essai de didactique expérimentale. Thèse d'Etat: Université d'Aix-Marseille II

Leplat, J. (1988). L'analyse des erreurs dans les nouvelles technologies: voies de recherche. *Revue de Psychologie Appliquée*, Vol. 38, 2, 151-160

Leplat, J. & Hoc, J.M. (1983). Tâche et activité dans l'analyse psychologique des situations. *Cahiers de Psychologie Cognitive*, Vol. 3, 1, 35-48

Leplat, J. & Pailhous, J. (1978). La description de la tâche: statut et rôle dans la résolution de problèmes. *Bulletin de Psychologie*, Vol. 31, 1-2, 149-156

Vinh Bang (1989). Rénovation de l'enseignement scientifique et révolution de l'esprit scientifique. In, A. Giordan, A. Henriquez, & Vinh Bang (Eds.) *Psychologie génétique et didactique des sciences* (pp. 11-14). P. Lang:Berne

Vinh Bang (1989). Bases psychologiques de l'initiation scientifique aux enfants de 7 à 12 ans. In, A. Giordan, A. Henriquez, & Vinh Bang (Eds.) *Psychologie génétique et didactique des sciences* (pp. 25-51). P. Lang:Berne

SUR LA DECONCERTATION COGNITIVE

par Yves Chevallard
IREM d'Aix-Marseille
Université d'Aix-Marseille II

1.Des apprentissages en souffrance

Je crois ne pas être étranger au choix du thème auquel est consacré cette année le colloque du COED. Aussi je voudrais indiquer en premier lieu comment j'ai été amené, dans le cadre de travaux que nous conduisons à l'IREM d'Aix-Marseille, à voir émerger la notion - qui n'est purement chronologique qu'en apparence - de *début d'un apprentissage.*

Quand on observe, comme nous le faisons depuis des années, l'enseignement des mathématiques au Collège ou au Lycée, on peut parvenir à se convaincre d'une chose, que j'énoncerai de manière à la fois radicale et floue: *les apprentissages n'y sont pas menés à leur terme.*

Une telle affirmation soulève immédiatement deux questions : celle de sa signification, celle de sa validation. Pour éclairer ces deux points, il me faudra rappeler rapidement la problématique d'une ligne de recherche qui est en quelque sorte l'épine dorsale de nos travaux.

2. Objets et rapports institutionnels

Le processus de transposition didactique (et, plus largement, tout processus de transposition institutionnelle) aboutit à une certaine organisation de certains objets de savoir. C'est ainsi que je résumerai, en la simplifiant, l'une des conclusions du schéma théorique que j'ai proposé dès 1980 et que l'on trouve exposé dans mon petit livre sur *La transposition didactique* (6).

---

6. Yves Chevallard, *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage, Grenoble, 1985.

Cette esquisse a été complétée depuis sur deux points essentiels, qui étaient présents en germe dès 1980. D'une part, à côté des «objets de savoir enseigné», il a fallu introduire *d'autres objets*, dont les notions d'objets *para-* et *protomathématiques* constituaient les prodromes, et parmi lesquels il faut ranger par exemple les objets «cours», «exercices», «savoir», «apprendre», etc. D'une manière générale, l'analyse didactique ne peut rendre raison d'une situation sans prendre en compte tout un ensemble d'objets, que je nomme *pertinents* pour la situation examinée.

D'autre part a émergé la notion de *rapport*, rapport d'un *sujet* (de l'institution considérée, dans telle *position* au sein de l'institution, celle d'enseignant ou celle d'enseigné au sein d'un système didactique par exemple) à un certain *objet*. Il s'agit-là de ce que j'ai appelé le rapport *personnel* (du sujet à l'objet). Ce n'est pas ici le lieu de dire comment cette notion change *radicalement* l'analyse du didactique. Je dirai seulement comment elle permet de donner un sens, dans la théorie didactique, aux énoncés du type «Il sait cela», «Je ne le sais pas», etc.

Le rapport d'un sujet X à un objet de savoir O, que je note R(X,O), se présente comme un *système* ayant un *état*, c'est-à-dire comme un point dans un espace d'états. Nous ne savons pas aujourd'hui décrire de manière satisfaisante R(X,O), c'est-à-dire l'état de R(X,O) : nous ne savons le faire que très partiellement, de manière suffisante toutefois pour certains emplois du concept.

Ce que l'on peut dire, pourtant, c'est que, culturellement, le rapport R(X,O) est regardé comme un système *à deux états possibles*, 0 et 1, correspondant respectivement aux affirmations «X connaît O» et «X ne connaît pas O».

Cette description est sans doute légèrement simplificatrice : car il est vrai que l'on peut dire aussi «X connaît O *assez bien*», ou «X connaît O *très bien*», ou «X connaît O *parfaitement*», etc. L'espace des états tend alors à ressembler, sinon à un continuum, du moins à une échelle ordinale «unidimensionnelle» ou «linéaire» (l'ordre sur l'échelle est total) comportant un certain nombre, fini, d'échelons. Il est facile de se convaincre, pourtant, que même en rajoutant des modalités ordinales, on est loin d'une description satisfaisante de R(X,O).

Mais il est aussi intéressant de se demander *comment sont produites* des affirmations du type «X connaît O» ou «X ne connaît pas O». Succinctement et d'une manière imagée, je dirai que ces affirmations résultent de la comparaison du rapport personnel (ou, plus exactement, de ce que j'ai appelé la composante *publique* du rapport personnel, par opposition à sa composante *privée*) avec un certain étalon, que je désignerai (provisoirement) par l'expression «savoir O». (Du point de vue formel, cette expression désigne un objet, l'objet «savoir O».)

On notera au passage que je me situe ici tout près d'une certaine théorie de l'évaluation. Mais c'est en ce point que les routes vont diverger. Un des thèmes classiques de la théorie de l'évaluation va concerner la difficulté d'effectuer la comparaison entre R(X,O) et l'étalon «savoir O». On montrera qu'un «évaluateur» est par exemple infidèle à lui-même, en désaccord avec d'autres, etc. Et on étudiera les facteurs de ces «distorsions». Le point principal sur lequel je m'éloignerai ici de ces considérations concerne *la question de la signification de l'expression «savoir O».*

Cette signification - tel est le postulat essentiel - est étroitement dépendante de l'institution I dans laquelle l'objet «savoir O» est manipulé. Pour le dire autrement, l'objet «savoir O» est un *objet institutionnel*, que j'ai appelé *le rapport institutionnel*, dans l'institution I, *à l'objet O*, et que je note $R_I(O)$. Le rapport institutionnel n'est le rapport personnel d'aucun sujet réel : c'est le rapport du sujet «idéal» de l'institution, qui est aussi un sujet imaginaire, un sujet qui est un personnage de l'imaginaire de l'institution.

Il faut ajouter encore que notre postulat, le phénomène de la détermination institutionnelle de l'étalon «savoir O», est l'objet d'une dénégation en acte de la part des institutions et de leurs sujets : on connaît ou on ne connaît pas le théorème de Pythagore ou le théorème de Thalès, nous laisse-t-on entendre. En d'autres termes, l'expression «savoir O» *aurait une signification universelle*, malgré des variations (institutionnelles) inessentielles.

Une telle dénégation - sur la signification de laquelle je ne m'arrêterai pas plus ici - soutient la légitimité de l'acte d'enseignement : on pourra, certes, enseigner de différentes manières le théorème de Pythagore, mais il n'y aura jamais là que des routes distinctes vers un *même* objectif - faire que les élèves «sachent le théorème de Pythagore». On dira par exemple que ce théorème, «qui était enseigné autrefois en classe de troisième, est enseigné maintenant en classe de quatrième» - point. Pour le sujet de l'institution scolaire telle qu'elle existe, il n'apparaît même pas évident que «savoir O» en telle classe puisse signifier autre chose que «savoir O» en telle classe ultérieure.

Pour comprendre cet aveuglement, il faut revenir au contrat didactique et à certaines de ses clauses les plus générales, que j'ai résumées sous le nom de *temps didactique*. (Nous retrouverons le temps didactique comme un personnage essentiel en toutes ces affaires un peu plus loin.)

Ces clauses disent notamment ceci : lorsqu'un objet de savoir O est introduit, il doit être enseigné *complètement, d'un coup, sans retour*. Rien de ce qui suivra dans le cours du temps ne devra remettre en cause ce qui aura été mis en place en cette occasion. Lorsque j'aurais appris à résoudre les équations du second degré, j'aurais appris là-dessus tout ce qu'on en peut savoir. Je pourrai oublier quelque peu, ou même tout à fait, ce que j'aurais appris ; mais il n'y aura, touchant cet objet, rien d'autre à apprendre, parce qu'il n'y aura rien d'autre à savoir. En d'autres termes, le rapport institutionnel à l'objet O mis en place lors de l'enseignement de l'objet O est réputé installé pour l'éternité : il ne devra plus changer.

3. L'institution didacticienne et les évidences de la culture

C'est cela que, chacun, nous avons appris par notre assujettissement à l'institution scolaire. Et c'est de cela, et de ses effets sur notre rapport aux objets de l'institution scolaire que nous devons apprendre à nous dégager. Le didacticien devra ainsi effectuer un travail non négligeable sur son propre rapport à O pour échapper à l'illusion de la transparence, pour voir apparaître le caractère *arbitraire* de $R_I(O)$, et pour faire apparaître O comme un objet relativement auquel *des institutions différentes définissent des rapports institutionnels différents*.

Ce faisant, il participera à l'émergence d'un nouveau rapport institutionnel à l'objet O, pour cette institution historiquement neuve qu'est la communauté des didacticiens des mathématiques.

Dans ce travail, les premiers exemples, que l'on doit gagner un à un, sont en général fortement contrastés : avant et afin d'apprendre à voir des différences plus minces, le didacticien devra se faire la main sur des cas plus facilement saisissables. Or ce n'est pas, généralement, de tels cas que lui offre l'empirie la plus immédiatement à sa portée ; et, pour penser ces différences qu'il pressent sans parvenir encore à les circonvenir, il devra d'abord faire oeuvre d'imagination, s'inventer des *institutions imaginaires*. L'imagination épistémologique, l'imagination didactique (pour paraphraser C. Wright Mills, qui parlait d'imagination sociologique, de *sociological imagination*) seront en cela les premiers instruments de son travail.

Je donnerai ici un exemple de ce travail. Considérons l'objet «équation du second degré». Le rapport institutionnel *pour l'élève* qui prévalait au Lycée, dans ces dernières décennies, peut être partiellement décrit de la manière suivante : lorsque l'élève est mis face à une équation du second degré $ax^2+bx+c = 0$, il doit former le discriminant $D = b^2-4ac$; si D est positif, l'équation admet pour solution les nombres $(-b+\sqrt{D})/2a$ et $(-b-\sqrt{D})/2a$, expressions qui donnent, après simplification éventuelle, les solutions de l'équation.

Cette description est partielle à bien des égards, sans doute ; mais elle omet surtout un élément tellement transparent - pour qui n'a pas travaillé suffisamment son asujettissement à l'institution scolaire - que nous ne songeons pas d'abord à le consigner. Le rapport scolaire usuel à l'objet «équation du second degré» a pour problématique celle de la *résolution* de l'équation donnée : une équation, *c'est quelque chose que l'on «résout»*. (On voit qu'un changement éventuel dans l'algorithme de résolution enseigné *ne changerait rien de ce point de vue.*)

Peut-on imaginer une institution qui serait un habitat pour l'objet «équation du second degré», et où pourtant une équation du second degré *ne serait pas vue comme «à résoudre» ?* Dans une telle institution, l'objet «savoir l'équation du second degré», alors, ne serait plus congruent avec l'objet correspondant de l'institution scolaire. Un sujet de cette institution pourrait «savoir les équations du second degré» *sans du tout savoir les résoudre*, et sans même que l'objet «résolution des équations du second degré» existe pour lui, sans même que cet objet soit un objet *institutionnel* pour cette institution.

Imaginons donc une institution où les équations du second degré n'apparaîtraient que dans le cadre suivant. Soit par exemple l'expression numérique $A = (2-\sqrt{3})^2 - 4/(1-\sqrt{3})$. Il s'agit de calculer A, c'est-à-dire de l'écrire sous la forme $a+b\sqrt{3}$. Posons $a = 1-\sqrt{3}$. On a : $1-a = \sqrt{3}$, d'où $(1-a)^2 = 3$, soit encore (après développement et réduction) : $a^2-2a-2 = 0$. L'expression A s'écrit encore : $A = (1+a)^2 - 1/a$. Le nombre a satisfait l'équation $X^2-2X-2 = 0$. Un nombre x qui satisfait cette équation vérifie aussi $x^2 = 2x+2$, et, en divisant par x, $2/x = x-2$. On a donc, en prenant $x = a$:

$$A = 1+2a+a^2-4/a = 1+2a+(2a+2)-2(a-2) = 2a+5= 2(1-\sqrt{3})+5=7-2\sqrt{3}.$$

On voit qu'ici l'équation du second degré qui apparaît *n'a nullement à être résolue*. La situation serait même plutôt inverse : étant donné un nombre a, *on crée une équation du second degré* dont le nombre a soit solution. On connaît donc *a priori* l'une des solutions de l'équation manipulée, et l'autre solution ne nous intéresse guère... «Avoir une bonne maîtrise des équations du second degré» n'a pas le même sens ici et là. Les deux rapports institutionnels - le rapport scolaire, d'un côté, celui que l'on a imaginé ici, de l'autre - n'ont que très peu de chose en commun.

Au passage, indiquons d'où procède notre institution imaginaire. En reprenant métaphoriquement le langage freudien de l'analyse des rêves, je dirai qu'elle s'est construite, par «déplacement» et «condensation», à partir de matériaux qui sont des «restes diurnes» mathématiques : le genre de gestes que j'ai décrit, on le trouve, en mathématiques, dès lors que l'on manipule un élément a algébrique sur un anneau ou un corps. Par exemple la matrice **a** définie par $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 1$ et $a_{21} = 0$ vérifie l'égalité $(\mathbf{a}-\mathbf{1})^2 = 0$ (si T est la transformation linéaire de R^2 dans lui-même associée à la matrice **a-1** dans le repère canonique (i,j), on a $T(i) = 0$, donc $T^2(i) = 0$, et $T(j) = i$, donc $T^2(j) = T(i) = 0$). Il vient ainsi : $\mathbf{a}^2-2\mathbf{a}+\mathbf{1} = 0$, d'où il résulte par exemple que l'on a : $\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{2}-\mathbf{a}$; etc. Semblablement, les manipulations effectuées plus haut à propos de A reviennent tout simplement à mettre A sous la forme canonique $a+b\sqrt{3}$ dans le corps $Q[\sqrt{3}]$.

4. Inventer l'imaginaire pour connaître le réel

Les deux types de rapports institutionnels à l'objet «équation du second degré» que l'on vient d'envisager sont nettement distincts. Rapprochons-nous maintenant du rapport scolaire en nous demandant ce que pourrait être le rapport à cet objet que l'on pourrait désirer voir vivre chez des élèves de Lycée «à la fin de leur apprentissage» de cette question.

Cette question procède clairement, ici, d'une problématique de l'ingénierie didactique, que j'expliciterai rapidement.

Il y a d'abord un moment, dans l'histoire didactique des élèves, où ceux-ci vont rencontrer pour la première fois l'objet «équation du second degré». Ce moment est en fait assez clairement marquable : l'*habitus* mis en place à propos des équations du *premier* degré, qui consiste à «ramener les x d'un côté, les termes constants de l'autre», devient ici inopérant. Certains élèves au moins, se prévalant (implicitement en général) d'une continuité imaginaire, chercheront, en ce début d'apprentissage, à résoudre l'équation $ax^2+bx+c = 0$ en écrivant $x = -c/(ax+b)$, et devront constater alors l'échec de cette tentative.

Il y a, à l'autre extrémité si je puis dire, un moment (situé en général *après* la fin de l'*enseignement* de la question des équations du second degré) où le rapport institutionnel (dans l'institution-classe) *cessera d'évoluer* - sans préjuger d'une éventuelle reprise d'évolution très ultérieure. C'est ce rapport institutionnel-là que pourra observer, à travers le comportement de ses étudiants devant une équation du second degré, l'enseignant d'Université recevant ceux qui, l'année précédente, étaient encore élèves de Lycée.

La mise en place de ce rapport institutionnel relativement stable marque la *fin de l'apprentissage* relatif à l'objet «équation du second degré», même si des reprises ultérieures d'apprentissage restent possibles et pourront effectivement se produire.

Cela étant, on peut se demander, dans une perspective d'ingénierie didactique, à quoi ce rapport institutionnel «terminal» pourrait ressembler. La réponse à cette question constituerait un élément important d'un cahier des charges spécifiant le «produit didactique» attendu de l'ingénieur didacticien, élément que celui-ci commencera par soumettre à une étude de «faisabilité didactique». Bien entendu, quelle que soit la réponse apportée, elle portera témoignage d'un certain arbitraire institutionnel, tout en étant regardée éventuellement, par l'ingénieur didacticien qui la propose, comme «la bonne réponse», définissant *authentiquement* ce que c'est que «connaître les équations du second degré» : mais nous sommes maintenant prévenus contre ce genre d'illusions absolutistes et universalistes.

Pourtant ce n'est pas la «valeur absolue» de la réponse apportée qui nous intéresse ici, mais bien sa valeur relative, sa valeur distinctive, soit encore ce qu'elle pourra, par contraste, *nous apprendre à propos du rapport institutionnel scolaire*. Lorsque l'élève aborde pour la première fois les équations du second degré, il est un *novice* et il commet des erreurs de novice (j'en ai donné un exemple). Il s'agit maintenant de définir ce que cela pourrait signifier d'être un *expert* en matière d'équations du second degré *quand on est un élève de Lycée.* C'est la différence entre cette «expertise» *virtuelle* et ce que l'on peut effectivement observer - le rapport institutionnel scolaire *réel* - qui nous apprendra peut-être quelque chose à propos de ce dernier.

5. A la recherche de l'expertise

Considérons par exemple le problème de la résolution de l'équation $x^2-(2+\sqrt{2})x+1+\sqrt{2} = 0$.

L'élève ordinaire de Lycée réagira ainsi : il calculera le discriminant $D = (2+\sqrt{2})^2-4(1+\sqrt{2}) = 4+2+4\sqrt{2}-4-4\sqrt{2} = 2$; puis les racines

$x = ((2+\sqrt{2})+/-\sqrt{2})/2$,

pour obtenir $x' = 1$ et $x'' = 1+\sqrt{2}$.

Imaginons maintenant l'expert. Il *envisagera,* si nécessaire, d'appliquer la procédure décrite précédemment. Mais il aura l'oeil attiré par la forme de l'équation, et envisagera alors d'examiner s'il n'y aurait pas une «racine évidente» x'. Il sait que si c'était le cas, l'autre racine, x'', serait donnée par le quotient du produit des racines par x', lequel vaut ici $(1+\sqrt{2})/1$, soit $1+\sqrt{2}$: la racine x'' serait donc égale à $(1+\sqrt{2})/x'$. Il se trouve en l'espèce que la «racine évidente» espérée est... évidente. Il s'agit de $x' = 1$, et on aura donc $x'' = 1+\sqrt{2}$.

On pourra penser que ces deux résolutions de l'équation proposée diffèrent par leur «élégance», leur rapidité, leur fiabilité : sous tous ces aspects, la solution de notre expert l'emporte sans doute sur celle de l'élève. Mais ces différences-là sont des *effets*, plus que des caractéristiques, d'une différence *structurale* plus essentielle. Là où l'élève se lance sans plus de façon dans ce qui est apparemment, pour lui, l'unique voie d'accès à la solution, notre expert *envisage plusieurs voies*, et opte pour celle qui lui apparaît la meilleure (d'où, ici, le fait qu'elle *soit* la meilleure).

La différence structurale dont je parlais est alors celle-ci : l'expert n'ignore pas la voie que l'élève emprunte, mais au lieu de la parcourir, il en *évoque* le parcours, pour le comparer à d'autres parcours possibles. C'est un tel comportement que l'on ne voit pas *normalement* apparaître chez l'élève. Et c'est à cette absence que l'on reconnaîtra le signe d'un apprentissage *non* *terminé*. Voilà ce que nous apprend en premier lieu la comparaison de l'élève et de l'expert tel que nous l'avons imaginé.

Pour donner davantage de relief à cette différence structurale, je prendrai maintenant un second exemple, qui fournira un contraste plus fort. (Le travail sur cet exemple participe du travail du didacticien sur son rapport à cette différence.)

Considérons le problème de la résolution de l'inéquation suivante :

$$|3x-2| < |2x+7|$$

Sans doute pourra-t-on voir l'élève de Lycée s'y prendre de différentes manières pour résoudre cette inéquation. La plus élémentaire (parce qu'elle conduit à résoudre des inéquations du *premier* degré) consiste à *«distinguer des cas»*, à l'aide par exemple d'un *tableau*. Il y a aura ici deux «valeurs séparatrices» et donc trois cas : $x < -7/2$, $-7/2 < x < 2/3$, $x > 2/3$. Pour chacun de ces trois cas, on sera amené à résoudre une inéquation du premier degré, puis à écarter les solutions qui ne relèveraient pas de l'intervalle numérique exploré. Par exemple, pour $x < -7/2$, l'inéquation proposée donnera $2-3x < -2x-7$, soit $x > 9$, et il n'y aura donc aucune solution dans l'intervalle $]-\infty,-7/2[$. Une autre voie consisterait à élever au carré les deux membres de l'inéquation proposée, pour se ramener à une inéquation du second degré, qu'il resterait à résoudre par la méthode «habituelle».

On pourra sans aucun doute voir l'élève emprunter l'une ou l'autre de ces voies ; on pourra même le voir emprunter l'une *puis* l'autre (parce que la première l'aura tenu en échec par exemple). Mais ce qu'on ne le verra pas faire - sauf exception - c'est envisager *ensemble* ces deux voies, s'avancer quelque peu sur l'une *et* sur l'autre, les comparer, pour choisir - c'est-à-dire créer - *un chemin spécifique bien adapté*.

Pour faire mieux apparaître encore le problème que nous rencontrons ici, je décrirai rapidement ce que pourrait être le comportement de notre expert face à cette inéquation.

La première voie - la distinction de cas -, il l'aura depuis longtemps regardée comme un simple recours, toujours possible, mais en général inintéressant. Cette voie serait intéressante, peut-être, s'il y avait une seule valeur séparatrice, par exemple s'il se trouvait devant l'inéquation $|3x-2| < |2x-4/3|$; mais alors l'inéquation serait *triviale*, équivalente en l'espèce à $|3x-2| < (2/3)\,|3x-2|$, soit à $0 < 0$ lorsque $x = 2/3$ et à $1 < 2/3$ dans tous les autres cas.

Voici alors dans quelles considérations il pourrait entrer. En élevant les deux membres de l'inéquation au carré on *obtiendrait* l'inéquation équivalente $(3x-2)^2 < (2x+7)^2$, qui *conduirait* à une inéquation du second degré $ax^2+bx+c < 0$, dans laquelle le coefficient de x^2, a, *serait* égal à $3^2-2^2 = 5$. L'ensemble des solutions *est* donc l'intervalle $]x', x''[$, x' et x'' étant les solutions de l'équation $ax^2+bx+c = 0$ (avec $x' < x''$).

On observera qu'en ce point notre expert aura obtenu *effectivement* la «forme» de l'ensemble des solutions. Pour déterminer x' et x'', il pourra alors considérer l'*équation* associée à l'inéquation donnée, soit $|3x-2| = |2x+7|$. Cette dernière admet pour solutions les solutions des équations du *premier* degré $3x-2 = 2x+7$ et $3x-2 = -(2x+7)$, soit respectivement 9 et -1. L'ensemble des solutions est donc l'intervalle $]-1,9[$.

Observons au passage que, dans le travail sur l'inéquation proposée tel qu'on vient de le décrire, l'objet «équation du second degré» apparaît comme *hautement pertinent*. Soulignons, surtout, qu'il doit maintenant être évident, pour qui connaît un tant soit peu l'enseignement des lycées, que l'apparition de ce type de solution *est très hautement improbable*. Mais j'irai plus loin en étant plus précis : cette apparition est improbable du côté de l'élève, mais elle l'est tout autant *du côté du professeur*. En d'autres termes, le type de rapport que nous avons prêté à notre expert imaginaire n'est ni le rapport institutionnel *pour l'enseigné*, ni le rapport institutionnel *pour l'enseignant*.

Si vous présentez à un professeur la solution que j'ai donnée plus haut, il commencera généralement par objecter que c'est là une manière de faire qu'on ne saurait attendre (moins encore exiger) des élèves - parce que, ajouterai-je, c'est là une solution trop «experte». Mais il ne vous livrera pas d'emblée son sentiment sur la valeur «intrinsèque» de cette solution, parce qu'un professeur tend à n'avoir de rapport aux mathématiques qu'à travers ses élèves, ou, si je puis dire, «modulo» ses élèves. Il n'est pas douteux pourtant que cette solution lui sera, presque autant qu'à ses élèves, étrangère.

6.Plus près de la classe

L'exemple de l'inéquation précédente peut n'apparaître que partiellement convaincant. La solution prêtée à l'expert suppose en effet une réelle virtuosité, qui pourrait avoir bien des raisons de ne pas être viable dans une classe de Lycée. Il me faut revenir ici sur ce qui est en jeu. L'expert dont j'ai commencé de tracer le portrait-robot ne se distingue pas en moyenne de l'élève ou du professeur par l'originalité et la virtuosité de ses solutions. Je reformulerai ici autrement ce que j'ai appelé la différence structurale entre l'un et l'autre types de rapport aux objets mathématiques les plus divers.

Dans un cas, tout se passe comme si la résolution du problème se présentait comme un point isolé, auquel on ne puisse jamais accéder que par un chemin unique, n'admettant aucune variante. Dans l'autre, la résolution du problème apparaît comme plongée dans un voisinage où peuvent être tracés de multiples chemins d'accès, qui se croisent, s'éloignent les uns des autres, se rejoignent, etc. L'élève ou le professeur semblent évoluer avec raideur sur une ligne de crête dangereusement tracée ; l'expert, plus généreux de ses mouvements, se déplace plus librement au sein d'un espace non cloisonné, au risque de se perdre, tout en sachant en fin de compte se retrouver. Le tableau évoque celui d'un estivant - l'élève - qui suivrait, le long d'une falaise, l'évolution d'une aile volante - l'expert.

Ce sentiment se retrouve dans des situations bien moins complexes que celles évoquées jusqu'ici. Lors d'une séance de travail avec des professeurs de Lycée, voici que nous parcourons de longues listes d'exercices portant sur le thème des inéquations en classe de Seconde. La plupart des exercices proposés sont «triviaux». Comment résoudrait-on l'inéquation $10/x - 5 < 0$? La procédure canonique de résolution est la suivante : on réduit au même dénominateur, ce qui donne $(10-5x)/x < 0$; le signe de l'expression $(10-5x)/x$ s'étudie alors à l'aide d'un tableau, etc.

Ne cherchons pas, dans cette manière de faire, quelque caractéristique *intrinsèque* qui l'éloignerait des façons de notre expert. Ce qui est frappant, c'est qu'à peu près rien d'autre n'est spontanément envisagé. Par exemple, la simple observation de ce que, si $x < 0$, l'inégalité proposée est trivialement satisfaite *apparaît comme une surprise à ces professeurs*. Une fois cela reconnu, ils ne verront pas davantage, sur le coup, comment on pourrait en tirer parti. (Pour $x > 0$, la fonction $10/x$ est une fonction décroissante de x, qui prend la valeur 5 pour $x = 2$: toutes les valeurs $x > 2$ sont donc solutions ; l'ensemble des solutions est ainsi $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$.)

L'examen d'autres exemples semblables apparaissant dans les listes proposées montrera ensuite que ces «trucs» d'expert permettent en fait d'apporter une solution rapide et sûre *dans tous les cas à envisager*. Et ces professeurs reconnaîtront, en fin de séance, avoir véritablement *«appris quelque chose»* à propos de ces inéquations pourtant si simples : quelque chose qu'eux-mêmes sans doute n'avaient pas eu jusqu'ici l'occasion de travailler suffisamment pour le découvrir par eux-mêmes. Pour cela, on pourra dire que ces professeurs n'avaient pas eu jusqu'alors, sur le thème choisi, l'occasion de devenir des «experts». Les professeurs eux-mêmes sont ainsi un témoignage vivant que, au sens que j'ai essayé de donner à cette expression, les apprentissages conduits dans la classe «ne sont pas terminés».

7. L'expertise et ses conditions de possibilité

Qu'est-ce donc que l'expertise, telle du moins que je l'ai envisagée jusqu'ici ? En particulier est-elle une autre façon de nommer l'état de qui «en sait plus» sur une question, de qui en sait, je dirai, «un maximum» ?

Je répondrai négativement à cette question, et c'est là un élément essentiel de notre analyse, qui donne à cette notion toute sa pertinence et toute sa portée. La notion d'expertise, en effet, est une notion relative, qui *conserve tout son sens au niveau le plus élémentaire*. Les exemples examinés jusqu'ici auront pu paraître obscurs (ou au moins partiellement opaques) au lecteur non mathématicien. Je donnerai maintenant un exemple dont l'enseignement, je crois, n'échappera à personne.

Soit donc à calculer la valeur de l'expression numérique $A = 37 + 24 - 19$. Posons ici que le calcul en question doive s'effectuer de tête. Le novice, ou du moins ce *novice prolongé* dont je n'ai cessé de parler, qui a acquis une réelle compétence peut-être, mais qui n'est pas pour cela un expert, ce novice, donc, agira à peu près ainsi : «37 plus 24, dira-t-il, égale... égale 61, 61 moins 19 égale... égale... égale 42», tout cela en effectuant de tête, chaque fois, l'algorithme de la soustraction appris à l'école primaire, retenues comprises ! Notre expert, par contraste, envisagera une multitude de chemins. Par exemple celui-ci : «37 plus 24, ça fait 37 plus 23 plus 1, donc 60 plus 1, moins 19, donc 60 plus 1 moins 20 plus 1, soit 40 plus 2, 42». Ou encore : «On a 37 plus 24 moins 20 plus 1, c'est-à-dire 37 plus 4 plus 1, soit 40 plus 2, 42». Ou aussi : «37 plus 24 moins 19, ça fait 37 plus 25 moins 20 ; 37 moins 20, 17, plus 25... 17 plus 23, 40, plus 2, 42». Ainsi la différence «structurale» mise en évidence à propos d'objets mathématiques d'allure plus complexe *garde-t-elle ici tout son sens.*

On pourrait multiplier les exemples, à tous les niveaux : l'inachèvement des apprentissages, au sens que j'ai donné à cette expression, apparaît comme un fait constant de notre enseignement scolaire. Mais la question qui m'intéressera désormais est la suivante : *pourquoi* en est-il bien ainsi, et pas autrement ? (Il s'agit là, en essence, d'un questionnement sur l'écologie didactique scolaire du rapport institutionnel aux objets de savoir mathématiques.)

Je relancerai cette enquête par un nouvel exemple, qui nous ramènera à l'enseignement du Lycée. Dans plusieurs des classes terminales de Lycée, les élèves rencontrent classiquement le type de situation suivant. Soit par exemple l'expression $(x+1)/(x-1)^2$; il s'agit de déterminer les nombres a et b tels que l'on ait l'identité : $(x+1)/(x-1)^2 = a/(x-1) + b/(x-1)^2$. Dans ce cas particulier, l'unique recours de l'élève sera, sauf exception, le suivant : réduire les fractions du membre de droite au même dénominateur $(x-1)^2$, puis «identifier les coefficients» des numérateurs figurant à gauche et à droite du signe d'égalité.

Notre expert pourrait pourtant envisager de procéder bien autrement. Réécrivant le numérateur x+1 sous la forme (x-1) + 2, il obtiendra immédiatement (en simplifiant par x-1) : $(x+1)/(x-1)^2 = 1/(x-1) + 2/(x-1)^2$. Ou bien encore il pourra envisager de multiplier les deux membres par $(x-1)^2$, pour donner alors à x la valeur 1, ce qui lui fournira aussitôt la valeur de b ; à ce stade, il pourra envisager d'obtenir la valeur de a en effectuant la différence $(x+1)/(x-1)^2 - b/(x-1)^2$ - et en anticipant d'ailleurs l'apparition, dans l'effectuation de ce dernier calcul, d'une simplification par x-1. Mais il pourrait aussi envisager de déterminer a en multipliant l'égalité proposée par x-1, pour faire ensuite tendre x vers plus l'infini. Ou encore, il pourra se proposer de donner à x deux valeurs numériques bien choisies, par exemple x = 0, qui donne -a+b = 1, et x = 2, qui donne a+b = 3. (S'agissant des deux derniers chemins évoqués, et faute de théorèmes généraux lui assurant qu'il en est bien ainsi, il lui resterait alors à vérifier que, pour les valeurs a et b trouvées, on a bien : $1/(x-1) + 2/(x-1)^2 = (x+1)/(x-1)^2$.)

J'entends d'ici l'objection, ou du moins l'explication que voudront donner de tout cela les professeurs de ces classes. «Nous pourrions bien sûr enseigner tout ce que vous dites, protesteront-ils, mais il nous faudrait alors beaucoup plus de temps. Et avec les élèves que nous avons ! Encore heureux s'ils savent mettre en oeuvre la méthode «par identification» !»...

Je n'entrerai pas ici dans des considérations sur ce que les élèves sont «capables» d'apprendre. Pour ce qui est du temps, il est hors de doute que, pour faire des élèves des experts, il faudrait consacrer à toute question mathématique abordée une durée d'étude beaucoup plus longue. Mais là n'est pas, à mon avis, le problème principal. Les contenus à enseigner, quels qu'ils soient, se comportent un peu comme un gaz : ils remplissent toujours tout le volume (temporel) qui leur est alloué. Le problème, si je puis dire, est celui de la *manière* dont ce volume est occupé. Ou, pour être plus explicite, c'est le problème du *type des situations didactiques qui permettraient de «mener à* *terme» un apprentissage.* J'essaierai de montrer que ce sont les *conditions de possibilité* de ce type de situations didactiques qui, aujourd'hui, ne sont pas satisfaites.

8. L'amateur et le technicien

Quelles caractéristiques, en effet, pouvons-nous assigner a priori à de telles situations ? Pour devenir «expert» en matière d'effectuation de sommes d'entiers relatifs, ou de résolution d'équations du second degré ou d'inéquations, ou de décomposition de fractions en éléments simples, en effet, il faut ne pas s'être contenté de savoir «résoudre le problème». Il faut par exemple s'être demandé comment on pourrait *encore* résoudre telle équation que l'on sait *déjà* résoudre de telle ou telle manière. En d'autres termes, et pour le dire avec des mots empruntés à la sagesse populaire, il faut, cent fois, sur le métier, avoir remis son ouvrage. Il faut avoir longuement *travaillé sa technique.*

Entrons un peu plus dans cette idée de «travailler sa technique». Elle renvoie à une pratique supposée qui implique que, lorsque le problème a été résolu, *il y a encore quelque chose à faire.* Il y a encore à *travailler le problème* - à travailler sur le problème. Elle suppose que le problème ne soit pas un *hapax* dans la biographie didactique de l'élève, mais un thème de travail, une *matière à travailler.* L'objectif du travail, alors, n'est pas la résolution du problème, *mais l'étude des manières de le résoudre.* Or on sait que ce n'est pas là le statut que le contrat didactique usuel donne à la notion de problème ; que ce n'est pas là, pour le dire plus exactement, le rapport institutionnel-scolaire à l'objet «problème». Pour celui-ci, en effet, une fois que le problème a été résolu, *il n'y a plus de problème.* Ou encore : un problème résolu est un problème *didactiquement mort.*

Le contrat didactique, donc, fait sur ce point obstacle. Mais pourquoi le contrat didactique est-il fait ainsi ? Qu'est-ce donc qui «verrouille» le contrat didactique en cet endroit ? (On voit que la recherche des conditions et des contraintes est, là comme toujours, récurrente.)

Ce n'est pas par hasard que j'ai été amené à parler du travail de la technique. L'expression est significative. De même l'idée de revenir encore et encore sur la question des modes de résolution du problème. Il y a là quelque chose de besogneux qui s'insinue. Ces expressions portent en elle toute une éthique de tâcheron. L'élève devrait se faire un *technicien* des nombres relatifs, des équations du second degré, des inéquations, ou des fractions rationnelles. Il devrait se faire, à un niveau de compétence défini, un *professionnel* de ces questions.

Or notre enseignement - du moins notre enseignement secondaire *général* - est en consonance avec certaines valeurs de la culture. Il résonne en harmonie avec une certaine hiérarchie culturelle des actes intellectuels. On y joue l'*amateur éclairé* - qu'on idolâtre - contre le *professionnel* et le *technicien* - qu'on tient en horreur. On y privilégie, contre les étroitesses d'un obscur labeur opiniâtrement reconduit, les fulgurantes lumières du Grand Art, de l'*Ars Magna* : je veux dire, plus simplement, qu'on y privilégie la résolution de problèmes *non encore résolus*.

Les manuels actuels comportent souvent, en fin de chapitres, des thèmes de travail visant à un «approfondissement». Or, bien significativement, ceux-ci consistent *toujours* à proposer à l'élève des problèmes *nouveaux*, laissés de côté dans le corps du chapitre, ou qui, par quelque aspect, peuvent se rattacher à lui. Aucun auteur de manuel ne songera à proposer à l'élève de *travailler sa technique* sur des types de problèmes *déjà abordés* ; tous prétendront l'introduire à des questions *inédites*. (Inédites pour l'élève : car la thématique de cet inédit-là est, généralement, fort étroite.)

L'engouement, dans la noosphère, et bientôt dans l'enseignement lui-même, pour la «résolution de problèmes», je veux dire pour ce *problem solving* dont on nous rebat les oreilles depuis plusieurs décennies, participe profondément du même évitement idéologique de la technique. L'idéologie de la «créativité», de ce tranquille génie qui ferait l'économie des 90% de transpiration que les meilleurs esprits tiennent pour l'indispensable ingrédient du travail créateur, complète le tableau. Il y a ici des connivences et des complicités qui bâtissent ensemble toute une logique de l'évitement.

J'essaierai de montrer plus loin que cette logique est paradoxale. Contre les propagandistes intéressés du *problem solving*, Hubert et Stuart Dreyfus, en une pénétrante analyse, rappellent cette donnée élémentaire : *«When things are proceeding normally*, notent-ils (7), *experts don't solve problems and don't make decisions ; they do what normally works»*. «Normalement», en effet, le

7. Hubert L. Dreyfus & Stuart E. Dreyfus, *Mind over Machine*, Basil Blackwell, 1986, pp.30-31.

«problème» aura depuis longtemps cessé d'en être un pour l'expert. Il l'aura de nombreuses fois résolu, examiné sous toutes ses coutures, en variant jusqu'à satiété les angles d'attaque, les stratégies et les tactiques. Il aura appris à tenir pour significatif le moindre indice, à y voir le signe déclencheur de telle ou telle manière de faire, le signal d'alarme permettant d'anticiper telle ou telle difficulté, etc.

Avant de voir où gît le paradoxe, il nous faudra régresser, dans l'observation, de cette technique *toujours déjà mise au point*, face visible de l'expertise, qui peut passer pour faite de purs automatismes, et semble se réaliser en une mécanique sans accroc, jusqu'en ce point où la technique *cherche à se mettre au point*. Il convient de se poster en ces commencements où le novice tente, difficilement, de s'engager sur la voie de la technique.

9. Le travail de la technique

Voici donc notre novice face à un problème, et un problème qui aura cessé pour lui d'être *problématique*. Soit par exemple le problème de la comparaison des fractions 125/273 et 47/98. Novice compétent, il sait que ce problème est potentiellement *mort*, parce qu'il aura déjà été *tué* : il lui suffirait de calculer 125x98 et 47x273, et de comparer ces nombres.

Cette question, donc, n'est plus pour lui un obstacle. Le travail de la technique supposera alors qu'il fasse revivre, *hic et nunc*, cette question comme problème, et qu'il accepte d'abord, psychologiquement, que la question proposée redevienne, pour lui, problématique ; qu'il renonce, momentanément, *à sa position de maîtrise*. Il conviendra donc que cette question constitue pour lui, à nouveau, un point opaque, un trou noir, dans une portion d'univers mathématique pourtant vécue jusque-là comme familière et balisée. Il lui faudra assumer de se laisser *déconcerter* par elle.

Voici alors un échantillon du travail qu'il pourrait accomplir. 47/98 est proche de 1/2, tout en étant inférieur à 1/2, puisque 47/98 < 47/94 = 1/2. Il en va de même pour 125/273, puisque 125/273 < 125/250 = 1/2. Ici notre novice aura simplement utilisé un résultat élémentaire - et classique - sur la comparaison de fractions ayant même numérateur. S'il n'a pas d'autres connaissances, il pourra tout de même penser, sans pouvoir vraiment contrôler son sentiment, que 125/273 est plus éloigné de 125/250 que 47/98 de 47/94, autrement dit que 125/273 < 47/98. Telle sera en ce point sa conjecture. Pour aller vers la vérification de cette conjecture, il pourrait alors songer à comparer «multiplicativement» à 1/2 les fractions données. Il obtiendra : 47/98 = (47/49)(49/98) = (47/49)/2, et 125/273 = (125/250)(250/273) = (250/273)/2. La conjecture initiale est alors équivalente à l'inégalité 47/49 > 250/273. Or on a : 250/273 < 250/270 = 25/27. Il suffirait donc de démontrer que 25/27 < 47/49. La fraction 47/49 peut s'écrire encore (25+22)/(27+22). Il resterait donc à montrer que : 25/27 < (25+22)/(27+22). On peut songer ici à une nouvelle conjecture : cette dernière inégalité aurait un caractère général, c'est-à-dire que l'on aurait, pour a < b (et a, b, c > 0), l'inégalité (a+c)/(b+c) > a/b. Et en effet cette inégalité se vérifie immédiatement par la technique classique des «produits en croix». La conjecture est bien vérifiée.

Arrivé en ce point, notre novice ne devrait pas se tenir pour satisfait. La solution obtenue apparaît en effet peu économique, et relativement particulière. Surtout, elle traduit mal l'évidence de la conjecture : l'impression de départ devrait pouvoir se traduire bien plus immédiatement en une preuve solide. Du moins peut-on toujours l'espérer !

Dans ce fragment de travail émergent tout de même quelques éléments remarquables : outre la comparaison de fractions ayant même numérateur ou même dénominateur, il y l'idée de comparer «multiplicativement», et surtout la dernière inégalité, a/b < (a+c)/(b+c). J'abrège. En travaillant sur cette inégalité, notre expert en puissance pourra arriver à ceci. Si c/d < c'/d' < 1, et a/b < 1, alors (a+c)/(b+d) < (a+c')/(b+d'). Ce phénomène numérique devient plus clair, et plus facile à mémoriser et à manipuler, si l'on s'en donne le modèle suivant. Imaginons qu'on ait une urne contenant b boules dont a boules blanches : la proportion des boules blanches dans l'urne est donc a/b. Si l'on mélange cette urne avec une autre, contenant d boules dont c boules blanches, la proportion des boules blanches dans l'urne-réunion sera (a+c)/(b+d). Si la réunion se faisait avec une urne dans laquelle la proportion des boules blanches, c'/d', soit supérieure à c/d, on arriverait à une proportion, (a+c')/(b+d'), *supérieure*, c'est-à-dire que l'on aurait exactement (a+c)/(b+d) < (a+c')/(b+d').

Cela permet-il alors de reprendre plus efficacement la question proposée ? Situons-nous au point où l'on se demande si l'on a bien 47/49 > 25/27. En réunissant à une urne de proportion 25/27 une urne de proportion 22/22, on obtiendra à coup sûr une urne à proportion supérieure ; donc

25/27 < 47/49. Aurait-on pu s'épargner une partie au moins du trajet qui nous a conduit jusqu'à la conjecture 25/27 < 47/49 ? Revenons cette fois à la question initiale : 47/98 > 125/273 ? On a : 47/98 = (3x47)/(3x98) = 141/294 = (125+16)/(273+21). La fraction 16/21, («largement») supérieure à 1/2, est donc («largement») supérieure à 125/273 ; il en résulte que 47/98 = (125+16)/(273+21) > 125/273.

Il restera encore à travailler pour mettre au point cette technique et pour l'avoir bien en mains. Et, dans ce travail, à tester en même temps sa portée et sa «robustesse» - sa capacité d'intervention dans des situations variées, et les limites de sa pertinence, le point au-delà duquel elle deviendrait inopérante ou trop coûteuse. Que se passe-t-il par exemple lorsque on a affaire à des fractions *supérieures à 1* ? Ou à des fractions *négatives* ? On aura ainsi ouvert, autour de la «simple» question de la comparaison des fractions, *tout un domaine à explorer*. Le mot d'expert, significativement, dérive du latin *expertus*, participe passé d'*experiri*, «essayer» : pour devenir expert il faut beaucoup essayer, et longuement s'essayer.

Dans cette exploration, dans le travail corrélatif de mise au point du coup d'oeil et du geste, c'est bien entendu le rapport personnel (ici à l'objet «comparaison de fractions») qui sera travaillé et qui évoluera. Ce que j'affirmais plus haut, c'est précisément que, si tel individu particulier peut toujours travailler ainsi son rapport personnel, l'institution scolaire *n'intègre guère les moyens d'un tel travail*. Et que, corrélativement, le rapport institutionnel-scolaire reste figé en une étape antérieure à une telle évolution. Ce sont quelques-unes des raisons de ce déficit d'évolution que nous examinerons maintenant.

10. L'expérience de la déconcertation cognitive

Quand on s'interroge sur l'inachèvement des apprentissages scolaires, sur ce phénomène qu'on peut résumer en disant que si notre enseignement conduit peut-être à la *compétence* il ne saurait amener à l'*expertise*, on ne peut éviter de rencontrer l'expérience de la *décontertion cognitive* : au lieu de la transparence, l'opacité et le trouble ; au lieu de l'assurance, le doute et l'incertitude.

Cette expérience nous fait quitter un univers familier et rassurant pour un monde où rien n'est encore exactement situé. Or il est un type de situations où nous sommes sûrs, tous tant que nous sommes, de l'éprouver : cette expérience se rencontre *au début de tout apprentissage.* Supposons ainsi que les circonstances de la vie fassent - comme c'est le cas aujourd'hui pour la plupart des élèves de terminales de nos lycées - que vous deviez vous initier à l'art du dénombrement. On vous propose le problème suivant.

En vue d'organiser un mariage, on veut constituer des couples de garçons et de demoiselles d'honneur. Supposez qu'il y ait deux garçons, Patrick et Arnaud, et deux filles, Eve et Julie. On pourra avec eux constituer une paire de couples. De combien de façons cela pourra-t-il se faire ? Vous n'aurez aucune difficulté à répondre : Patrick ira avec Eve et Arnaud avec Julie, ou bien Patrick sera avec Julie et Arnaud avec Eve. Il y aura donc *deux* façons de constituer des couples : cela va de soi, cela est évident, pourquoi même poser la question ? Mais supposez maintenant que vous disposiez de *trois* garçons - Patrick, Arnaud et Julien - et de *trois* filles - Eve, Julie et Charlotte. Vous pourrez alors former trois couples. De combien de façons différentes ?

Je suppose ici mon lecteur oublieux de ses mathématiques du Lycée. Ne dites pas pour autant que vous ne comprenez pas la question posée : vous la compreniez fort bien dans le cas où l'on considérait *deux* paires d'enfants. Reconnaissez simplement que la réponse ne vous vient pas immédiatement ; et surtout, que vous vous sentez dans une grande incertitude, non seulement sur la réponse à avancer, mais déjà sur la manière de parvenir à une réponse ; et, plus encore peut-être, de soutenir d'arguments votre réponse éventuelle (3 ? 9 ?...). En passant du «cas à 2» au «cas à 3», vous venez de passer de la transparence, de la certitude cognitive, du «cela va de soi», à la *déconcertation cognitive.*

Si j'ai pris la liberté de tenter de faire vivre *hic et nunc* au lecteur une telle expérience, ce n'est pas sans bonnes raisons. Il faut voir en effet que, ordinairement, un adulte n'a plus que bien rarement de telles expériences de déconcertation cognitive. Lorsqu'elles surviennent, elles sont ordinairement très fugaces. Vous décidez un jour de changer la disposition des meubles dans votre chambre. Vous vous levez la nuit, à demi éveillé, pour des raisons que chacun pourra imaginer ; et vous vous heurtez de plein fouet à un mur...

Refaites avec quelques adultes non mathématiciens de votre entourage l'expérience des couples. Vous observerez vraisemblablement un phénomène que je n'ai pas rapporté plus haut : le «refoulement» ou la «dénégation» en acte du problème. Soit en effet on vous dira que ce problème n'en est pas un, ou du moins que ça n'intéresse pas, qu'on ne sait pas ; on le chassera sans autre forme de procès du royaume de l'honnête homme à la tête bien faite (à défaut d'être bien pleine). Soit on vous répondra, après quelques tâtonnements infructueux, qu'il suffirait d'un papier et d'un crayon, et de peu d'instants, pour pouvoir répondre. Soit donc le problème sera rejeté sans façon, voire avec quelque ironique arrogance que la courtoisie ne saurait tout à fait dissimuler ; soit on niera qu'il y ait là... un «vrai» problème.

Ces attitudes traduisent une donnée fondamentale de la vie adulte : l'évitement de la déconcertation cognitive, par le refoulement ou la dénégation de tout ce qui pourrait déconcerter. Plus profondément, cette horreur de la déconcertation cognitive constitue à mes yeux le noyau de ce que j'ai appelé l'*adultisme*. Elle explique, d'une certaine manière, que les adultes aient tant de difficulté à apprendre.

11. L'adultisme et la question des apprentissages

Cette difficulté-là est d'essence culturelle : l'adultisme imprègne aujourd'hui profondément notre culture, laquelle, par mille aspects, milite contre les apprentissages. Il est ainsi plus facile à un adulte - aux niveaux psychologique et culturel - de dire qu'il sait skier ou qu'il ne sait pas skier (ou danser, ou parler allemand, etc.), que de dire qu'il est *en train d'apprendre* à skier (ou à danser, ou à parler allemand) ; et il lui sera plus facile de skier ou de ne pas skier, que d'apprendre à skier en s'y essayant.

Nos sociétés ne savent guère gérer, culturellement, et par suite socialement, les apprentissages réalisés à l'âge adulte. Un adulte, pourrait-on dire, sait ou ne sait pas. Il y a ainsi une dénégation de ce passage qui conduit du non savoir au savoir. Ces passages sont quasiment toujours donnés ou pour déjà anciens, ou comme à venir, rattachés, en une évocation discrète et furtive, à un passé ou à un futur plus ou moins fortement irréels ; leur actualité créerait un malaise.

De tels passages sont, culturellement, traités à l'instar de ces moments furtifs et cachés que sont par exemple les soins de la toilette. Le fait d'avoir les ongles taillés ou non, voilà ce qui sera culturellement visible ; non ce moment intime où vous les taillerez, et dont tout le sens culturel s'épuisera pour nous dans le but poursuivi.

Nos apprentissages reçoivent le traitement que nous réservons à nos rognures d'ongles : ce sont des éléments de notre biographie promis à l'élimination ; ce sont des déchets biographiques, les rognures de notre vie intellectuelle. (C'est précisément à eux que s'intéresse la didactique, soit ce que j'ai appelé, d'une manière englobante, l'anthropologie didactique des savoirs : ce faisant, notre discipline met le doigt sur un point aveugle de nos cultures, que celles-ci voudraient oublier ; elle constitue potentiellement, pour cela, une force révolutionnaire dans la culture.)

Bien entendu, on peut *imaginer* des cultures qui donneraient une grande visibilité à la toilette, des sociétés où le moment de la toilette serait même plus chargé de sens, plus porteur d'expérience sociale et de signification culturelle, constituerait un moment plus fort que ces moments de la vie sociale «où l'on a fait sa toilette». (Il y a eu, en Europe même, toute une évolution, sur quelques siècles, de la visibilité culturelle et de la place dans les pratiques sociales des soins du corps : une société où prédominent les bains publics n'est pas semblable à cet égard à une société où les soins du corps sont une affaire strictement privée, que l'on cache, dans l'intimité d'une salle de bains, à l'entourage familial même.)

Semblablement, on pourra imaginer des cultures où l'apprentissage occuperait une place éminente ; où, même, l'étude et le fait d'*apprendre* seraient davantage prisés, et chargés de sens, que le «simple» fait de *savoir*. Telle n'est pas, pourtant, la situation faite aujourd'hui, dans nos sociétés, aux apprentissages et à l'étude. Ceux-ci sont devenus l'apanage d'un âge de la vie, de l'enfance jusqu'à cette adolescence prolongée qui est celle de nos étudiants. Comme les soins du corps, ils ont leurs lieux - disons, génériquement, l'Ecole - et leur temps. La prolongation de la formation à l'âge adulte, qui se généralise, ne trouve pas d'autres cadres mieux adaptés que ceux dans lesquels on a depuis longtemps enfermé l'activité d'apprendre.

Or nous sommes, en matière d'apprentissage, comme les chats à leur toilette. Nos apprentissages ne se prêtent pas aisément à un enfermement étroit, ils ne sont guère compatibles avec la sévère réclusion que nous tendons à leur imposer. Ils exigent fréquemment une réorganisation de tout notre vécu. Et par cela ils tendent inlassablement à nous exposer à l'expérience de la déconcertation cognitive, qu'ils portent en eux comme la coquille la noix, et qu'on ne saurait contenir en un réduit toujours clos au regard du monde et de soi-même.

12. Le temps didactique, solution et problème

Cela, dit à propos de l'âge adulte, vaut pour l'écolier lui-même. L'âge adulte a sans doute des frontières imprécisément tracées ; mais l'*adultisme* déborde largement l'âge adulte. Il n'épargne ni l'adolescent, ni même l'enfant. Il faut y voir d'abord l'effet, dans toutes les classes d'âge, d'une certaine évolution de la culture. Mais l'Ecole, à son insu peut-être, entretient là-dessus d'étranges complicités avec la culture. Je voudrais suggérer que l'Ecole moderne s'est mise en place comme un dispositif qui installe l'adultisme au coeur même des apprentissages.

C'est en ce point que je devrai revenir au temps didactique, et à sa structure. Le principe que celui-ci concrétise n'est rien d'autre que la seconde règle cartésienne, qui nous enjoint «de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qui serait requis pour les mieux résoudre». La structure du temps didactique moderne est fondée sur une *analytique du savoir* à laquelle les pères fondateurs - je pense ici par exemple à Charles Démia (1636-1689), le créateur des *petites écoles* de Lyon - ont immensément travaillé. Le savoir à enseigner est découpé en fragments minuscules, examinés un à un, et dont rien ne saurait échapper à l'élève, dont il devrait, en un bref laps de temps, se rendre maître entièrement.

L'important, ici, est que toute question présentée soit quasi immédiatement résolue, que l'incertitude qu'elle engendre soit d'emblée étroitement circonvenue pour être presque aussitôt éliminée. Il conviendra que l'élève se rendre très vite compétent, par la maîtrise de quelque procédé canonique mis entre ses mains. La fin - ou plutôt l'arrêt - de l'apprentissage s'établit sans transition dans la contiguité immédiate de son début : l'idéal serait qu'on pût les faire complètement coincider.

C'est un peu inexactement bien sûr que je parle ici d'apprentissage : c'est l'enseignement qui prend fin presque aussitôt que commencé ; mais, pour l'essentiel, l'arrêt de l'apprentissage en découlera bientôt. Le rapport institutionnel mis en place par l'enseignement ne garantit qu'une fragile compétence, si le rapport personnel de tel ou tel l'élève pourra peut-être évoluer vers une certaine forme d'expertise. Car la structure didactique à laquelle l'élève est assujetti se mue en lui en *habitus*. La hâte à enseigner, la bonne volonté mise à le protéger contre la déconcertation cognitive devient chez lui horreur de tout ce qui ne serait pas apprentissage instantané, et propension à éviter, autant que faire se peut, l'incertitude cognitive.

Ajoutons à cela, en reprenant ici une remarque profonde de Georges Devereux (8), que ces apprentissages brefs, segmentés jusqu'à l'artificialisme, réalisés dans l'*hic et nunc* de la classe - ce que l'auteur mentionné nomme les apprentissages I/M, les apprentissages «ici et maintenant» - n'auront de vraie sanction, dans la biographie scolaire de l'élève, ou même dans sa biographie tout court, que fort longtemps après leur accomplissement. Cette condition générale, créée par un réglage étroitement contrôlé de ce que j'ai appelé les processus d'objectivation et de véridiction (9), permet sans doute que l'élève enchaîne les apprentissages scolaires, sans tomber dans les errements de l'adultisme pur - ce qui le conduirait bientôt à refuser tout apprentissage. On sait pourtant que quelques-uns n'y échapperont pas.

13. Début d'apprentissage : assomption culturelle et gestion didactique

On saisit ainsi pourquoi les apprentissages scolaires *ne se terminent pas*. Il faut voir en cela, je crois, l'effet de l'insigne faiblesse, culturelle et didactique tout à la fois, de notre capacité à gérer les situations de déconcertation cognitive et d'incertitude dans la relation du sujet aux situations qu'il devrait traverser. Celui, plus généralement, de notre incapacité à gérer les apprentissages, à concevoir le temps de l'apprentissage comme un temps *non homogène*, où se découpent, dans une échelle des durées dilatée par rapport à

---

8. Georges Devereux, *Ethnopsychanalyste complémentariste*, Flammarion, Paris, 1985, chapitre XI.

9. Yves Chevallard, *Evaluation, véridiction, objectivation - La relation didactique comme caprice et miniature*, conférence inaugurale des *Rencontres internationales sur l'évaluation en éducation 1989* (Paris, 27-29 septembre 1989) : in J. Colomb et J. Marsenach (eds), *L'évaluateur en révolution*, INRP, Paris, pp.13-36.

notre étalon actuel, des moments dont il faut apprendre à reconnaître les exactes scansions.

A cet égard, il n'est pas impossible que notre savoir culturel des apprentissages se soit appauvri sur quelques décennies. Il m'est arrivé de dénoncer l'illusion actuelle, propagée par une nombreuse bureaucratie de la formation, qui porte à croire que l'agrégation de mathématiques se prépare en deux semaines, que «l'informatique» s'apprend en quinze jours, etc. Cette croyance en des apprentissages rapides, cette hâte à en finir au plus vite, est un autre indice de notre incapacité culturelle croissante à dominer la question des apprentissages.

Dans la classe, les effets de cette illusion ne sont pas moins nocifs. La fiction que met en place le temps didactique contemporain, où l'on ne distingue guère, ainsi qu'on le faisait encore autrefois, les commençants, les grands commençants, etc. (H. et S. Dreyfus, eux, distinguent ainsi cinq étapes : celles du *beginner*, du *early beginner*, de la *competence*, de la *proficiency*, celle enfin de l'*expert*), cette fiction brouille le réel.

Car le refus «systémique» de l'incertitude n'annule pas toute incertitude. Pis, dans la mesure où l'élève se voit soumis à de perpétuels débuts d'apprentissage - une chose après l'autre -, dans la mesure où il ne parvient que rarement au sentiment d'une maîtrise tant soit peu accomplie des situations qu'il doit affronter, *l'incertitude est pour lui partout.* Pour lui qui est, presque chaque jour, au début d'un nouvel apprentissage, la déconcertation cognitive est de tous les instants.

Mais les acteurs du système sont peut-être les plus mal préparés à affronter ce destin. Le professeur ne comprend pas que l'élève ne s'y retrouve pas, alors qu'il aura tout fait pour lui simplifier la vie. L'état de déconcertation, *normal en début d'apprentissage*, et encore sensible dans ces relances volontaires où l'élève pourrait trouver l'occasion de travailler sa technique, devient l'état permanent, que rien de raisonnable ne semble pouvoir expliquer. L'élève lui-même ne se l'expliquera pas davantage ; s'il ne s'en dégoûte pas, il y verra la preuve tangible de son incapacité indéfiniment exposée. Ainsi naissent des tensions dans la classe, dans l'Ecole, et autour de l'Ecole.

Pour comprendre ces tensions, il nous aura déjà fallu quelque peu travailler. Et il nous faudra encore beaucoup travailler si nous voulons pouvoir aider à les résoudre. Le thème des *débuts d'un apprentissage* est de ceux par lesquels, je crois, un tel travail peut aujourd'hui être engagé.

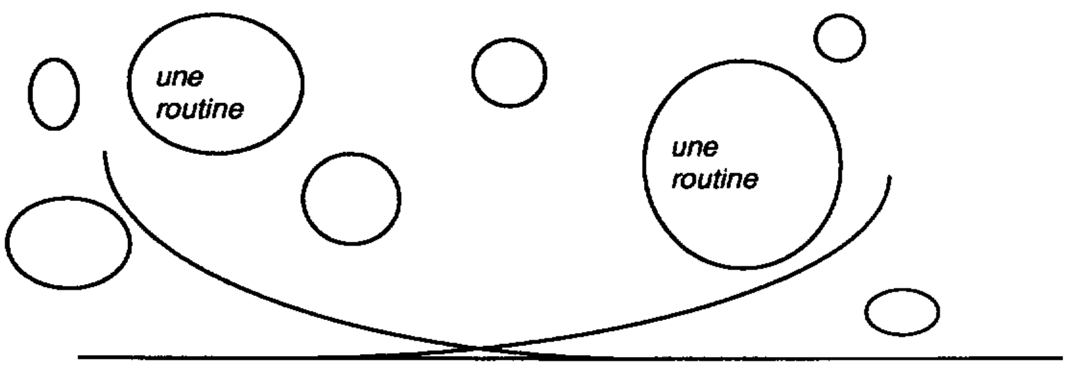
DEBUT D'UN ENSEIGNEMENT, DEBUT D'UN APPRENTISSAGE: OU PLACER LES ROUTINES[10]

Auteurs: F. Conne, J. Brun
Compositeur/interprète: F. Conne
Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation
Université de Genève

Comme méditation sur le temps, construction / reconstruction, fondement / préconstruit, cette petite histoire racontée par Lewis Carroll , Les aventures de Sylvie et Bruno. :

> «Il était une fois une coïncidence qui était partie faire une promenade en compagnie d'un petit accident; pendant qu'ils se promenaient tous deux, ils rencontrèrent une explication, une très vielle explication, si vielle qu'elle était toute pliée en deux et ratatinée, et qu'elle ressemblait plutôt à une devinette.»

INTRODUCTION



[10] Exposé de F. Conne à la journée du COED, mai 1990, repris par écrit, mai 1991.

[11] Notre propos se rapporte à la recherche entreprise avec J. Brun, R. Schubauer, et J. Retschitzki, ainsi que quelques étudiants en sciences de l'éducation , subside F.N.R.S. n° 11-25448-88.

Ce schéma représente l'exemple que je voudrais développer aujourd'hui. pour faire référence au titre que j'ai donné, mais sans approfondir pour l'instant, les routines y sont représentées comme des galets bien ronds bien lisses laissés sur la grève et charriés de temps en temps par le flux et le reflux des vagues venant battre la plage. J'en ai juste indiqué quelques unes ici, mais il y en a beaucoup encore. Mais avant d'en venir à ce schéma, quelques considérations sur le thème de notre rencontre.

Considérant les questions du temps didactique, j'ai toujours des problèmes avec le sens de la ligne du temps, mais peut-être le temps fait-il des boucles, ou des spires, mais comment alors traiter l'avant et l'après sur de telles figures ? Et que marque donc alors le début ? En particulier atteint-on jamais le début d'un apprentissage?

Je vais parler ici d'un sujet bien particulier, l'enseignement de l'algorithme de la divison écrite en colonnes. A ce titre l'enseignement de la division est typique du moment où le cursus mathématique de l'enseignement cesse d'être élémentaire, la méthode pour diviser des nombres écrits (en écriture décimale) combine de manière particulièrement sophistiquée des savoirs auxiliaires dûment enseignés. Déjà se pose une question, est-ce que je ne diverge pas du sujet en vous entretenant plus du *début d'un enseignement* que du *début d'un apprentissage* ? Peut-être que la question vous paraîtra saugrenue. Mais considérez donc toutes les descriptions de l'enseignement dont nous disposons, ou pour être plus exact, tous les descriptifs d'intentions d'enseigner, les comptes rendus de la façon dont tel enseignant tel méthodologue, tel auteur de manuel entend organiser l'enseignement de tel objet de savoir. Comparez donc cette abondante littérature avec les données descriptives très pauvres concernant les apprentissages effectifs. Qui veut connaître les apprentissages scolaires devra longtemps chercher dans une littérature spécialisée, ou y aller voir de lui-même. Or dans cette relative pauvreté de données, encore plus pauvres sont celles qui portent sur les débuts d'un aprentissage. Généralement on feint de croire qu'enseignement et apprentissages sont en phase et donc que leurs débuts coïncident. Il se pourrait cependant que cette contemporanéïté ne soit que fictive comme le suggèrent les données dont je vais vous entretenir ici. Dit en passant, tout le monde s'accorde bien avec l'idée que l'apprentissage se poursuit bien au-delà de l'enseignement. Tout le monde s'accorde aussi à penser que les apprentissages s'enchainent les uns aux autres. Il serait étonnant que ces décalages entres la fin des enseignements et la fin des apprentissages ne se répercutent pas sur les débuts. Comment donc concilier les regards?

OU PLACER LES ROUTINES ?

Pourquoi donc associer les *routines* avec le thème du *début d'un apprentissage* ? parlons d'abord des routines. Je veux vous parler de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algorithme de division en colonne à l'école primaire. On peut donc considérer que le but d'un tel enseignement est justement de munir les élèves de *routines* (au sens courant du terme, je préciserai plus loin), soit de calculs disponibles et effectuables par eux sans qu'il ne leur en coûte trop. Un tel objectif découle d'une certaine représentation que l'on se fait tout à la fois du traitement mathématique et du travail intelligent. Les *routines* sont des auxiliaires de travail, qui fonctionnent de manière relativement autonomes, isolées, à peu de frais pour une grande fiabilité, et qui sont là pour fournir des résultats et des données au traitement mathématique à proprement parler.

Où donc placer les *routines* ? La question en cache une autre. Dans le modèle des *routines* vues comme *des auxiliaire machinals du traitement mathématique*, c'est une relation fonctionnelle du traitement mathématique qui est mis en évidence. Dès lors le calcul d'une division en colonne n'est pas **en soi** une *routine*, mais **fonctionne** comme telle dans certaines conditions particulières. Dans le projet pédagogique maintenant, on voudrait que les élèves soient capables de tels traitements. Il faut donc que l'élève *acquière* ces *routines*. Pour ce faire une action d'enseignement sera mise en place qui aura pour point de mire ces *routines*. Une question vient alors tout de suite: selon quel modèle va-t-on considérer le travail fourni par la classe durant la présentation et l'appropriation de la *routine* ? Le modèle du travail mathématique assisté par des auxiliaires machinals de calculs fournissant les résultats et les données que j'ai évoqué ci-dessus, serait-il là aussi valable? Peut-être, mais alors les *routines* auxquelles il serait fait référence ne sauraient en aucune façon être confondues avec celle que l'on se propose d'enseigner. Du point de vue du *nouvel objet* que l'on présente, les conditions fonctionnelles évoquées dans ce modèle ne sont pas celles du travail de présentation et d'acquisition ; et si, à ce moment de l'enseignement, cette procédure qui est l'*objet* de l'action d'enseignement est bel et bien **destinée** à devenir une *routine*, elle n'y joue pas encore son rôle. Les *routines* sont donc à placer en fin d'apprentissage.

Se pose alors la question de savoir comment caractériser le travail de cette acquisition. Il est culturellement admis que ce travail doit prendre place dans les leçons de mathématiques. Examinons maintenant l'action d'enseignement elle-même. Classiquement, on la considérait comme articulant trois moments, et ce modèle très simple va nous sevir de point de référence; ce schéma reste encore d'actualité, même si le temps consacré à chacune de ces phases peut varier fortement d'une classe à l'autre, et si le fil de cette organisation (concernanant les 4è, 5è et 6è années primaire) peut paraître fort distendu, voire enchevêtré parmi les autres sujets inscrits au programme scolaire. Ces trois moments sont : 1° la ***présentation*** proprement dite, 2° l'***entraînement***, l'exercice, et enfin 3° l'***usage*** à la faveur de la solution de ***problèmes***. Dans chacun des cas il s'agit d'engager réellement les élèves dans un travail, et c'est la qualification de ce travail qui est délicate. Dans un tel schéma, l'enseignement consiste donc à contrôler les activités des élèves pour en guider l'apprentissage. A l'issue du processus,. les élèves devraient être capables de traiter de façon autonome et pertinente une nouvelle classe de situations, et de se dégager de ces contrôles provisoirement établis. Il faut bien voir ici que **c'est le fonctionnement global du dispositif d'enseignement, incorporant non seulement les actions effectives des élèves, mais aussi toutes les interactions du groupe classe dirigé par l'enseignant qui est décrit**, l'enseignement est sensé assister l'élève en le dispensant de devoir tout contrôler à la fois. Penser ainsi l'enseignement, c'est le concevoir comme un dispositif réalisant les changements au niveau du sens et de la fonctionnalité des activités engagées en classe.La signification didactique de ces trois moments de l'enseignement est bien claire.

-La **présentation** vise à contrôler que l'acquisition de la nouvelle *routine* ne se passe pas dans le vide, hors signification et sans assurance d'un minimum de compréhension de la part des élèves. Il semble aussi admis que ce travail soit considéré comme participant d'une élaboration mathématique. Ici, le dispositif d'enseignement assure le contrôle du sens.

-L'**entrainement** vise à rendre machinal l'effectuation de la procédure présentée, il s'agit chez l'élève, et pour l'élève de la rendre disponible en tant que *routine*. Ici, le dispositif d'enseignement assure le contrôle du fonctionnement de l'élève dans son effectuation.

-Les **problèmes** visent à englober ces *routines* dans des traitements mathématiques plus larges, et devraient réaliser le modèle de l'activité mathématique à proprement parler. Ici le dispositif d'enseignement établit son contrôle à un niveau plus élevé, et porte essentiellement sur le traitement de l'élève. Ce dernier est appelé à prendre en charge de façon cohérente le sens de ses calculs et la justesse de leur effectuation. Les chercheurs et les enseignants s'accodent à penser que c'est cette phase qui pose le plus de problème dans l'enseignement de la division.

A ce point de la discussion, une question s'impose: comment caractériser la participation de l'élève dans un tel schéma d'enseignement? Ceci revient à se demander comment situer l'apprentissage de l'élève par rapport à un enseignement ainsi conçu. Le décalage entre les phases d'enseignement et d'apprentissage assume la charge d'opérer ce changement de statut, qui affecte autant le plan du fonctionnement que celui de la signification. Se posent alors différents problèmes comme celui de l'articulation de ces 3 moments d'enseignement, et des jeux différents auxquels y sont conviés les élèves. Mais l'articulation avec les enseignements antérieurs n'est pas non plus évidente. Par exemple, la présentation de l'algorithme de division procède classiquement d'une procédure de soustractions successives. A l'autre bout de l'apprentissage, la *routine* à laquelle on aboutit comporte des soustractions, ces dernières fonctionnant comme *sous-routines*, réurnissant les restes auxiliaires permettant de poursuivre la détermination des chiffres du quotient. Ces *sous-routines* soustractives sont-elles les soustractions successives de l'introduction ? Pour qu'on en soit assuré il faudrait qu'au moment d'aborder la division, la troisième phase de l'enseignement de la soustraction soit parachevée! Cette façon de penser l'action d'enseignement voudrait donc que la soustraction, lors de la présentation de l'algorithme de division, perde son statut fonctionnel et objectif) de *routine* pour être considérée comme une *procédure primitive* (en tant que participant d'une procédure de partage), puis qu'elle retrouve un statut de *routine* lorsque l'on passe à l'entrainement et à l'usage de la division proprement dite. (Il est clair en effet que la présentation ne suffira pas à l'acquisition de l'algorithme par l'élève, et qu'une phase d'exercice sera nécessaire). Ceci va donc correspondre à un nouveau changement de statut, où **toutes** les procédures engagées dans la procédure nouvellement mise en place redeviendront *routines*. Peut-on vraiment s'attendre que chaque élève suive cette alternance, ou bien va-t-il rester en marge de celle-ci, se contentant de déterminer quand il doit s'impliquer vraiment dans la situation? A priori rien n'exclut que le fonctionnement des élèves en de telles situations suive un tout autre schéma que celui que l'enseignement se propose de réaliser.

UN MODELE PSYCHOLOGIQUE

Les remarques ci-dessus partaient d'une caractérisation de l'activité mathématique selon un critère de fonctionnalité. Quoique relativement simple au départ, l'analyse s'est faite plus complexe à mesure où j'ai essayé d'intégrer à ce modèle des considérations sur l'enseignement lui-même. Je pense qu'à ce point de ma réflexion il convient de clarifier un peu le propos. Reprenons alors le modèle fonctionnel. Dans son article : La microgenèse de la représentation d'un problème., M. Saada-Robert, psychologue du fonctionnement, propose de considérer trois facettes d'un schème: **routine, primitive, procédure**. Je cite ses définitions[12] :

"Lorsqu'il y a repérage et choix d'un schème identifié en fonction de sa pertinence à un objet, ensemble d'objets ou de relations, on peut parler de **routine**. C'est un schème familier au sujet (au sens de Boder, 1982) et fonctionnellement lié à l'objet (objet-à-faire...). Une routine n'en est pas moins un programme bien compilé, qui se déroule en tant qu'unité compacte, bloc non composable. Elle est liée au contrôle ascendant, car son guidage est assumé par les aspects particuliers de l'objet (tels qu'ils sont sémantisés par le sujet). (...) Lorsqu'il y a guidage de la routine par le but (contrôle descendant, téléonomique), on peut parler de **primitive**. Elle se définit par sa signification en regard de la solution. (...) La primitive est modifiable et composable. (...) Une **procédure** est l'organisation unifiante résultant de plusieurs primitives composées. Celles-ci, au départ isolées, ont en commun la valeur de condition nécessaire à la solution. (...) On aboutit alors à la formation d'une **procédure-type**, unité procédurale manipulable, qui en tant

[12] C'est moi qui souligne

que bloc pourra servir de routine ou de primitive dans un autre contexte (ce qui n'exclut pas sa réorganisation sur le plan des schèmes fondamentaux non contextuels)."

Le texte cité concerne la description du fonctionnement cognitif d'un sujet **dans une situation non didactique**. Ceci veut dire que ses procédures traitent du problème posé, et de la réalité qu'il évoque. En ce sens ceci décrit un fonctionnement idéal. Si ce modèle est correct il devra pouvoir aussi s'appliquer au fonctionnement cognitif de l'élève en situation diadactique, mais ce qui va changer c'est le type de réalité traitée par l'élève, étant donné que la situation didactique a une double réalité: la réalité évoquée par le problème, comme ci-dessus, et la réalité des objets présentés à l'élève pour qu'il les apprennent. Ainsi dans la leçon sur la division, l'élève traite la réalité d'une situation évoquée, le partage par exemple, mais il traite aussi la réalité de ce qu'il doit apprendre, à savoir la division, qui de fait est un objet de la situation.

Nous reviendrons sur ce point. Mais auparavant, je tiens à faire encore quelques remarques concernant ce modèle. Outre les critères de fonctionnalité clairement exposés, ce modèle a l'avantage d'expliquer comment se forment de nouvelles *procédures* à partir de *primitives* et comment ces *procédures types* sont alors disponibles pour fonctionner soit à titre de *routines* soit à titre de *primitives* lorsqu'elles seront engagées dans de nouvelles constructions. L'intérêt du modèle réside donc dans l'intégration opérée entre les critères fonctionnels et le processus de construction. Ceci est très parlant pour quiconque tente d'analyser l'enseignement des mathématiques et tout particulièrement l'enseignement des algorithmes.

Du point de vue de **l'objet d'enseignement** d'abord. L'algorithme de division que l'on enseigne s'il n'est pas une *routine* à proprement parler, n'en est pas moins un support à une *routine* de calcul, et il semble particulièrement adéquat de l'analyser en tant que tel, et d'y retrouver l'architecture d'une *procédure-type* composée, et sans doutes constructible, à partir de *primitives*. Ainsi fournira-t-on un modèle de construction de l'algorithme à partir d'une *procédure de soustractions successives*, qui est réorganisée et raccourcie par l'intégration de *procédures de traitement de l'écriture de position*, et *de recherche de multiples simples du diviseur*. Ce modèle, outre qu'il réalise une explicitation de l'algorithme, fournit aussi *la clé d'une mise en situation de sa construction*. Les pédagogues depuis Condorcet, au moins, ne s'y sont pas trompés. Bien entendu ce faisant **nous opérons au moyen d'une analogie**. L'objet d'enseignement n'est que le support à la procédure que l'on veut enseigner. Nous n'avons fait ici que d'établir une relation, une correspondance entre l'architecture de l'algorithme, d'une part, l'organisation d'une situation de reconstitution de cette architecture, et un modèle du fonctionnement cognitif. Comme nous n'avons pas prise directe sur ce fonctionnemt cognitif, nous pouvons espérer que cette analogie va nous permettre de contrôler la construction de la *procédure* chez l'élève, en contrôlant la situation. La donnée de cette analogie suffit-elle? Nous allons voir que non.

Du point de vue de **la logique de l'enseignement** cette fois, le modèle fonctionnel permet une traduction des considérations développée plus haut (Où placer les routines?). Désignons donc le *début d'un enseignement* par ce moment plus ou moins long consacré à la présentation de l'algorithme. On pourra alors dire que ce temps de l'étude consistera en la construction, dans un cadre situationnel clairement établi, d'une *procédure-type* à partir des *primitives* induites par la situation. Ainsi la soustraction ou la multiplication qui entrent dans la construction de l'algorithme de division (la *procédure-type* visée par l'enseignement) vont revêtir, dans ce moment de la présentation le statut de *primitives*. (Ceci n'empèche pas que, par ailleurs, elles puissent avoir déjà fonctionné à titre de *routines* lors d'activités mathématiques antérieures dans l'enseignement). Puis comme je l'ai dit, lors du second moment de l'enseignement, celui de l'exercice, la nouvelle *procédure type* va être appelée à fonctionner pour elle-même, et enfin venir s'intégrer dans des traitement de problèmes à titre de *routine* (quitte, lors d'activités ultérieures à servir éventuellement de primitive à de nouvelles *procédures)*.

Ce schéma paraît relativement clair, l'analogie semble effectivement licite, du moins du point de vue de la **fonctionnalité**. Car la question vient alors de savoir **qui fonctionne sur quoi** (quelle réalité). Or comme je l'ai déja mentionné plus haut, c'est du **fonctionnement de l'enseignement** dont il a été question, et en particulier **c'est le système maître-élève pris globalement qui procède ici**.

Le processus d'enseignement décrit ci-dessus s'ordonne sur l'alternance des contrôles du sens et du fonctionnement. Le dispositif d'enseignement assure le contrôle du sens lors de la phase de présentation. Ainsi l'enseignement de la division débute-t-il fréquemment par l'évocation d'une situation de partage par distribution d'objets. Le maître pourra proposer une procédure de soustraction successives, et **la leçon réaliser** effectivement cette organisation procédurale. Comment le maître s'y prendra-t-il pour que les procédures engagées par les élèves, lors de la présentation et du montage de l'algorithme, **fonctionnent bien pour eux** à titre de *primitives*, et ne restent pas de simples *routines* effectuées ponctuellement lors de la leçon, afin de répondre aux questions? Ce point est d'autant plus délicat à obtenir que les élèves peuvent se contenter de comprendre superficiellement ce dont il s'agit, sans avoir construit pour eux-mêmes une *procédure-type*. Nous voyons donc que le problème pour l'enseignant est de s'assurer que les élèves participent activement au montage de la nouvelle *procédure*, qu'ils comprennent que le but de l'activité est plus de trouver une *procédure générale de résolution* qu'une simple solution, et qu'ils puissent penser à la façon dont ils ont procédé. Lors de la phase d'entrainement le dispositif d'enseignement établit le contrôle du fonctionnement. Ici ce n'est plus tant l'engagement actif de l'élève qui est problématique pour l'enseignant, mais bel et bien le risque que le sens des activités engagées s'estompe totalement. C'est bien ce qui semble se passer généralement en classe. La troisième phase d'enseignement devrait permettre de renouer sens et fonctionnement. J'ai déjà mentionné que cette phase était reconnue comme particulièrement problématique.

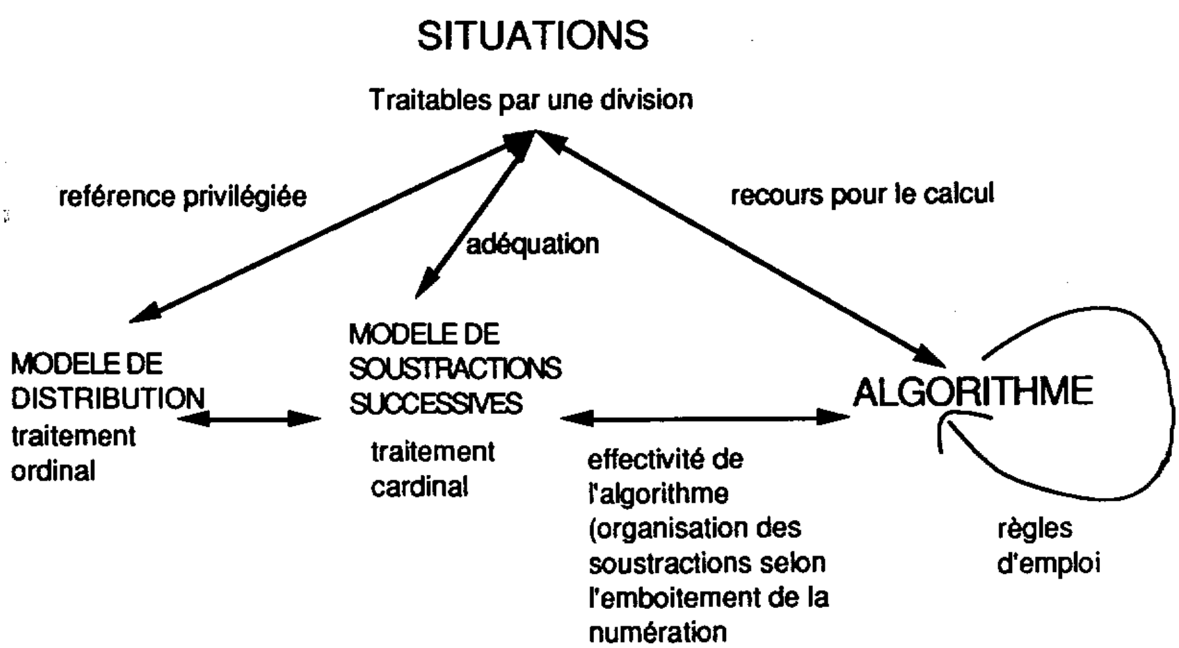
A ce point nous nous retrouvons avec la même question que tout à l'heure: dans quelle mesure l'analogie que nous venons de faire est-elle pertinente? L'enseignement ne peut atteindre le fonctionnement cognitif des élèves qu'en organisant des conditions à leurs traitements mathématiques. On peut chercher à transférer au niveau du dispositif d'enseignement les caractéristiques de fonctionnalité et de signification décrites par le modèle psychologique. Mais dans quelle mesure ceci peut-il garantir que le fonctionnement induit chez les élèves s'intègre effectivement dans ce schéma? Le dispositif peut bien établir tantôt son contrôle au niveau du sens, tantôt au niveau de la fonction, ceci n'assure pas que le fonctionnement, respectivement le sens, induit par le dispositif chez les élèves soit garanti. Ceux-ci peuvent bien rester en dehors du processus et y déployer des significations (relativement) propres et un fonctionnement (relativement) autonome. On peut chercher alors à focaliser l'action d'enseignement sur l'objet enseigné et espérer que ceci assure le joint. Précisons bien ce point. L'algorithme enseigné est un support à la *procédure* de calcul que l'élève doit apprendre. Ce support est d'autant pus réel, concret, que lui correpond un symbolisme standard, l'écriture des nombres et les dispositions des données sur des diagrammes de calcul en colonnes. Dans la situation didactique, la signification des activités engagées n'est donc pas univoquement celle induite par le problème à traiter. La division ne se limite pas à être une procédure de calcul en situation de partage, mais est cette opération que l'on déroule sur telle écriture numérique. **Et les procédures que l'élève va engager (à titre de *primitive, ou de routines*) vont être sinon plus, du moins tout autant des procédures de traitement de ces éléments symboliques, que des procédures de traitement du problème qui lui est posé**. Ce sont peut-être à elles qu'il s'agit d'appliquer le modèle fonctionnel. Dès lors quelle sera donc la *procédure-type* effectivement construite, peut-on dire qu'il s'agit bien d'une division? Et alors que signifie *diviser* ? Nous touchons ici les limites du contrôle du sens dès lors que l'effort didactique mis à placer les élèves dans des situations signifiantes, est généralement contrecarré par le recours au symbolismes standards et les significations que ces derniers véhiculent par eux-mêmes (en tant que réels objets culturels). Ou bien on laisse les élèves inventer eux-même leur symbolismes, à mesure qu'ils élaborent leurs procédures, ou bien on est amené à travailler sur deux niveaux de signification à la fois. L'algorithme est un modèle du fonctionnement cognitif, puis un support à ce fonctionnement, comment être assuré qu'en apprenant à l'élève à fonctionner **avec** l'algorithme, on lui apprennne véritablement à fonctionner **sur** ce support et **selon** ce modèle. Fera-t-il de la division ou des mathématiques?

Par ces remarques nous avons donc soulevé deux problèmes qui s'interposent à notre tentative d'utiliser le modèle fonctionnel dans une analyse didactique de l'enseignement de la division écrite. Ces problèmes se résument en la question suivante: **qui** fonctionne sur **quoi** ? Par *qui* nous entendons *quel système*, l'élève ou le couple maître-classe, par *quoi* nous entendons sur *quelle réalité*, qu'est-ce qui est l'objet traité par la procédure. La question qui se pose à nous devient donc celle de savoir si le modèle cognitif fonctionnel, du système sujet-situation, que nous avons utilisé peut effectivement être transféré (par analogie) au niveau du fonctionnement du système didactique: maître-élève-savoir.

NOTRE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES ALGORITHMES DE CALCUL A L'ECOLE PRIMAIRE.

Les problèmes que nous avons soulevé ci-dessus s'intègrent bien dans la problématique de notre recherche sur les algorithmes, et sur l'algorithme de division en particulier. Je me contenterai d'en présenter ici que la première phase et vous évoquerai la ligne selon laquelle nous entendons poursuivre.

Pour des raisons institutionnelles trop longues à évoquer ici, la recherche que nous entreprenons ne porte ni sur l'observation et l'analyse d'un enseignement effectif de la division, ni sur la mise au point d'une séquence de situations d'enseignement de cet algorithme. Ce qui, dans les termes des deux questions auxquelles nous nous sommes arrêtés ci-dessus, se tradutit par le fait que nous nous sommes focalisés sur la seconde: qui fonctionne sur **quoi**? Autrement dit *quelle réalité* traite un élève lorsqu'il effectue une division, mais aussi de quelle réalité traite l'enseignement de la division? Nous retrouvons ici la dualité apprentissage / enseignement dénotée dans notre introduction. L'analyse que nous faisons peut se lire dans le schéma ci-dessous:



Lorsqu'on examine l'introduction de la division, on note partout ce souci de mise en relation pertinente des énoncés et de l'algorithme. Cependant, c'est par une référence privilégiée à une **situation de partage** que l'on introduit (l'idée de) la division. Or cette situation se traite par des distributions (tours), qui ne représentent pas un modèle des traitements de l'algorithme lui-même.

Le **modèle des soustractions successives** est celui auquel on aura alors recours pour introduire le calcul de la division. Cela se fait dans le cadre général de **l'inversion de la table des multiples** du diviseur. Cette table est construite essentiellement par itérations additives, à son inversion correspond naturellement les soustractions successives. Le passage du modèle-de-partage au modèle-de-soustractions-itérées se fait généralement par une étude de la succession des transformations que la quantité de choses à partager subit dans la situation de référence. On fait en sorte de ne pas tant s'occuper des choses elles-mêmes, que des nombres associés à leurs arrangements (par un arrangement en tableaux récapitulatifs, par exemple). Ceci opère **une mise en adéquation** du modèle de soustractions successives avec les situations de division, et de là, avec la division elle-même. Ceci une fois établi, l'algorithme de division se présente comme un traitement de soustractions successives, organisé sur l'exploitation systèmatique des règles de la numération de position. Ainsi, le modèle de soustractions successives explique à la fois l'adéquation de la procédure de division en colonnes pour des situations divisives, et le fait que cette procédure soit effective. Ainsi donc, on peut dire qu'**une sorte de preuve de l'algorithme a été jouée lors de l'introduction** que je viens de vous décrire. Ceci est assez classique puisqu'on retrouve ce schéma dans les explications de Condorcet dans son célèbre ouvrage: Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité. Cette façon de *preuve par l'application*, est l'inverse de celle que l'on trouve couramment à l'université, par exemple pour le cours de calcul différentiel et intégral, où c'est dans les démonstrations que l'on voit en premier la mise en oeuvre des techniques de calcul (techniques qu'il s'agit de repérer en vue des applications lors des exercices). Tout enseignement recourt à un degré ou à un autre à une telle introduction. Selon les cas et les styles d'enseignement, cette phase sera juste évoquée, fugacement, ou au contraire patiemment développée et approfondie. Faut-il rappeler que dans tous les cas de figure, rien n'assure le degré de participation effective des élèves à cette élaboration. Il se peut très bien qu'ils n'aient pas fait autre chose que d'assister à ce jeu, et nous ne savons pas ce qu'ils auront effectivement construit à ce propos. La situation n'a peut-être joué qu'un rôle de décors, voire de support à des activités mises en oeuvres par les élèves à la demande expresse de l'enseignant.

A cela s'ajoute qu'un **système de règle d'emploi de l'algorithme** se constitue au cours des entrainements. C'est ce système qui est mis en place par l'exercice et le pointage puis le corrigé des erreurs de calcul. Ce système est relativement autonome, coupé des situations de références: on ne fait jamais *une erreur de partage*, ni de *soustraction successive*, lorsque l'on se trompe dans une division. La sanction n'intervient pas dans la situation de référence. (Une erreur est perçue puis traitée par l'élève au niveau du fonctionnement essentiellement, et ce souvent, malgré toute la *bonne volonté* du maître.)

Concernant le **langage** qui accompagne cet enseignement: c'est-à-dire soit les termes dans lesquels on évoque la division en tant qu'opération, soit les termes qui accompagnent les différentes actions engagées dans le calcul de la division, soit encore les termes qui désignent le statuts des nombres inscrits dans le diagramme (dividende, diviseur, quotient, reste, etc...), il convient de remarquer que les mêmes expressions peuvent se rapporter à chacun des sommets de la figure donnée ci-dessus. Ceci n'assure cependant pas pour autant la mobilité dans les évocations de situations par des énoncés, nous allons le voir par la suite. Par exemple, prenons la sorte de ritournelle qui rythme le calcul lui même et son système de règles d'emploi: ex. 552 : 24, «*En 5 combien de fois 24, je ne peux pas, je prends 55; en 55 il va 2 fois 24, 2 fois 24, 48, il reste 7, j'abaisse le 2; en 72 combien de fois 24 , 2 fois c'est pas assez, j'essaie 3 fois, 3 fois 24, 72, ça tombe juste,...*» Quoique ces termes fassent un tout, chacun évoque précisément la nature de la règle appliquée. On trouve par exemple la formule: *en tant combien de fois tant* qui suggère la multiplication certes, mais la multiplication par additions successives, et dont le résultat doit être alors comparé puis soustrait de la quantité à diviser.

Notre recherche se centre actuellement sur l'étude de ce **système d'emploi.** Nous examinons les erreurs des élèves, nous voudrions aussi décrire les *traitements didactiques* de ces erreurs (traitement didactique des erreurs, en contraste avec traitement psychologique de ces mêmes erreurs par les psychopédagoges essentiellement). Nous voudrions aussi avoir accès à la connaissance induite par la mise en place de ce système. Or rien ne sert de demander directement aux élèves ce qu'ils font, ils nous servent la ritournelle qu'ils ont apprise, même si elle est adaptée à leurs erreurs, il en est de même de leurs explications qui reprennent étrangement les termes mêmes de leurs enseignants.

Rappelons que nous cherchons à déterminer quelle réalité traite un élève lorsqu'il effectue une division, d'une part, et, d'autre part, de quelle réalité traite l'enseignement de la division. Nous savons que les supports symboliques, écritures et verbalisation supportant les actions prennent une grande part dans cette *réalité* :

A ce propos, nous savons que les différents pays n'utilisent pas les mêmes diagrammes, et que la plupart des gens, adultes comme enfants, sont fortement perturbés lorsqu'on leur demande d'effectuer un calcul, par ailleurs routinier pour eux, sur un tableau inhabituel. Et ceci se passe même si le nouveau support symbolique ne présente que de faibles différences. Comme par exemple entre la

```
 444 | 37
-37  |----
 ---    12
  74 |
 -74 |
  ---
   0 |
```

disposition d'une division enseignée en Suisse Romande:

et la

```
     12
   -----
37 )444
   -37
   ---
     74
    -74
    ---
      0
```

disposition américaine: . Autre fait que nous connaissions, celui qui veut que peu d'individus arrivent à s'imaginer ce qui se passe avec des variantes de degrés divers des algorithmes de calcul, et que ceci ne semble pas tenir à leur compétences de calculateur. Mais plus encore, le fait que ces exemples de variations, très répandus dans la littérature pédagogique, ne "passe" pas dans la culture commune, ni dans l'épistémologie des professeurs. (Par exemple les fameuse multiplications *per gelosia* et *à l'égyptienne;* mais encore aussi les variantes de soustractions mentionnées par Condorcet dans son ouvrage, et commentées pour les instituteurs; ou encores les articles sur l'histoire et les formes des algorithmes de calcul des 4 opérations élémentaires...)

Pour comprendre cela, nous avons examiné le langage et les indices symboliques associés au recours à la division. Ces indices peuvent agir soit en évoquant une situation type pour laquelle l'élève connaît la procédure qui la résout, soit en évoquant la *comptine* qui accompagne et rythme l'effectuation des calculs, ou encore les termes consacrés pour décrire la division, soit à des niveau plus ponctuels, et directs, des termes (*diviser, fois*), des expressions (*en tant combien de fois tant, il reste)*, voire des dispositions de symboles numériques désignant le calcul lui-même. Etc... Dans le modèle classique du recours à une division, à titre de *routine* intervenant lors de la résolution d'un problème, la réalité du calcul s'estompe derrière la réalité évoquée par l'énoncé, et nous ne pouvons y avoir accès. Voilà pourquoi nous avons eu l'idée pour notre expérimentation d'inverser la référence, c'est-à- dire essayer d'évoquer une division par l'entremise d'un énoncé de problème, qui reprenne les termes mêmes des explications scolaires et de la ritournelle. En quelque sorte, nous nous sommes demandé si, par cette entremise, nous pouvions induire une réflexivité dans le traitement mathématique.

Parallélement, nous espérons que l'analyse des erreurs des élèves nous permettera, elle aussi de répondre à notre question (quelle *réalité* l'élève traite-t-il?). Nous avons donc essayé de combiner nos deux approches. Ainsi par exemple, il semble que l'élève se donne certaines règles de calcul non pas en se référant à la signification de son traitement, mais en se donnant des prescriptions, voire des interdits, dont la fonction est clairement d'éviter telle ou telle erreur. Une telle circonstance donne encore plus de *réalité* aux indices figuratifs et symboliques. L'algorithme dans sa forme écrite (son diagramme) n'est pas seulement l'objet à apprendre, mais c'est aussi l'objet des règles que l'on se donne!

Nous avons donc proposé aux élèves d'effectuer un certain nombre de divisions, et parallélement, aux mêmes élèves, nous leur avons soumis quelques énoncés de problèmes se référant à une situation numérique de calcul (équivalente à une situation de division). Notre question concernant ces énoncés était de savoir si cela suffirait à évoquer pour les élèves une division, et à quel titre. Par exemple, dans l'énoncé suivant: *De 800, j'ai enlevé 2 fois 320 et il me reste 5 fois 32. Puis j'ai divisé 800 par 32 et j'ai trouvé 15. Ai-je fait juste ?* Une bonne compréhension permet de déduire que la réponse *15* est fausse, sans qu'il soit nécessaire ni d'effectuer la division *800:32*, ni de calculer le multiple: *15x32*. Il en sera de même dans l'énoncé suivant: *De 728, j'ai enlevé 8 fois 26, et il me reste 520. Combien de fois faut-il additionner 26 pour avoir 728 ?* avec une particularité de plus cette fois, à savoir que l'élève pourrait même ne pas envisager la division pour le traiter! Nous voulions examiner quelles données (ici toujours en surnombre) les élèves allaient identifier pour leur traitement, sur quoi ils allaient donc fonctionner. Notre expérimentation demande quelques précautions, de multiples facteurs pouvant être évoqués dans l'interprétation des résultats que nous allions obtenir. Il nous faut donc d'une part proposer une variété d'énoncés, et d'autre part essayer de qualifier cette *sensibilité aux variations* en examinant ce que nos énoncés induisent.

EXPERIENCE

Nous avons soumis à 6 classes de 5P et 6P (cm2 et 6$^{\text{ème}}$) une épreuve écrite de division en quatre parties.

- Les deux premières concernaient le calcul lui-même et ont donné d'assez bons résultats. Nous avons engagé une analyse des erreurs commises dont nous avons fait la description ailleurs. Sans entrer dans les détails, les élèves interrogés étaient d'assez bons calculateurs.

- La troisième partie de notre épreuve consistait à compléter trois divisions:

9072 : ... =...

... : 38 = ...

... : ... = 95. La consigne orale était : *une division, c'est un nombre divisé par un nombre, et ça donne un troisième nombre. (Tout en disant ceci, je montrais à mesure les trois emplacements du diagramme) Tu dois compléter là et là (les lacunes) pour obtenir une division, un calcul de division qui soit correct.* L'exercice: ... : ... = 95 est le plus intéressant, car resenti par les élèves comme étant le plus contraignant.

- La quatrième partie consistait en la donnée de quatre énoncés :

(a) Dans 552, il va 3 fois 24, c'est sûr. Mais on peut y mettre encore beaucoup de fois 24. En tout, combien de fois peut-on mettre 24 dans 552 ?

(b) De 728, j'ai enlevé 8 fois 26, et il me reste 520. Combien de fois faut-il additionner 26 pour avoir 728 ?

(c) De 800, j'ai enlevé 2 fois 320 et il me reste 5 fois 32. Puis j'ai divisé 800 par 32 et j'ai trouvé 15. Ai-je fait juste ?

(d) Dans 86, il va 3 fois 27. Et dans 864 ?

Comme vous le voyez, tous ces problèmes peuvent être résolus par une division. Ils comportent même trop de données, pour celui qui pose celle-ci. Par contre, ils reprennent chacun à leur manière, les termes mêmes de la ritournelle, ou des explications de l'algorithme. Ces termes sont aussi ceux utilisés par les élèves eux-mêmes. Le premier problème induit une idée d'addition itérée du nombre 24, le second fait plus référence à une procédure de soustractions successives, tandis que les deux derniers problèmes demandent à intégrer les données obtenues dans le cadre du déroulement d'une division.

Concernant tous ces résultats (confirmés et renforcés encore par d'autres expérimentations effectuées depuis), il se dégage une caractéristique intéressante. Prenons tout d'abord l'exemple de ... : ... = 95. On peut envisager en gros trois façons de répondre à cet item. 1° Se donner un dividende. 2° Se donner un diviseur et obtenir le dividende en effectuant le produit de ce diviseur avec le quotient 95. 3° Essayer d'inverser la procédure de division, en quelque sorte reconstituer le dividende en remontant le calcul.

Rares sont ceux qui se donné un dividende. Et aucun n'a poursuivi dans cette voie. Le point difficile est qu'en procédant ainsi, même si l'on pense à diviser le dividende par le quotient (ce qui n'est de loin pas évident pour nos élèves comme le confirme une expérience ultérieure), l'élève risque de trouver un résultat avec reste (on demandait des divisions entières), ce qui ne saurait convenir comme diviseur.

Les élèves se sont donc donné un diviseur. Mais alors les deux résolutions décrites ci-dessus se sont présentées et la solution par multiplication ne s'est pas imposée à une majorité d'élèves! Mais le fait qui est plus significatif réside plutôt dans le fait qu'une bonne part des élèves se représente suffisamment bien le déroulement d'une division pour envisager de le reconstituer. Ceci n'est pas rien compte tenu du fait qu'il demande à ce que les élèves puisssent *ouvrir* leur *routine* de calcul, soit faire un effort d'explicitation. Dans ce cas on trouve alors quelques résolutions correctes, plusieures erreurs du type: 8145 : 9 = 95, que les élèves peuvent ensuite corriger, mais aussi des erreurs du type: 8125 : 95 = 95 qui représentent une sorte de *division chiffre à chiffre*, erreur que les élèves peuvent commettre dans des item de division en début d'apprentissage. Mais les élèves ne parviennent pas toujours à un résultat et peuvent rester dans une impasse, soit qu'ils se perdent dans le parcours inversé de leur calcul, soit qu'ils n'arrivent pas à concilier la donnée d'un quotient, **lu comme un nombre** (95), avec la suite des chiffres 9 et 5 que doit leur donner le calcul. Un second point très intéressant des résultats obtenus est le suivant: dans certains cas, l'élève ramène sa résolution à la pose d'un calcul annexe, la mise en action d'une *routine*, qui lui donne un résultat considéré comme réponse. Par exemple: se donner un diviseur et effectuer la multiplication de ce dernier par le quotient 95 ; mais aussi se donner un diviseur, par exemple 9, et se contenter d'associer les produits 9x9 et 9x5: 8145, voire en décalé: 855 (810+45 disposé en deux lignes décalées) sans que la multiplication 95x9 soit posée explicitement. Par contre dans d'autres cas l'élève s'engage sur une résolution beaucoup moins mécanique, et établit une *reconstitution effective de procédure*. Ce qui frappe aussi c'est que l'élève une fois qu'il s'est engagé sur l'une ou l'autre piste, ne semble pas pouvoir envisager une autre façon de résoudre son problème. Il semble donc que chacune de ces résolutions représente un autre traitement de la question posée.

Concernant les problèmes, le résultat est très net. Pour les problèmes (a), (b) et (d), moins de la moitié des élèves recourt à la pose d'une division pour les résoudre. La principale procédure employée consiste à faire une recherche multiplicative, de type *essais-erreur*, sans même que cette recherche soit guidée par une évaluation de l'écart au but. Majoritairement donc, les élèves se donnent un nombre puis le multiplient par le "diviseur" donné (24, 26 ou 27). Fait anecdotique, très souvent ils essaient le *carré* de cette donnée, ce qui aura permi à certains d'obtenir rapidement les solutions aux problèmes (a) et (b). Mais on voit aussi apparaître des recherches additives pour les problèmes (a) et (b), ou soustractives pour le problème (b) essentiellement. Le problème (d) suscitant quant à lui une variété très grande de résolutions, et un taux de réussite très faible, indice de la perplexité que cet énoncé a pu provoquer chez ces élèves.

Le problème (c) par contre, se distingue nettement des trois autres en ce sens qu'il est le plus fréquemment résolu par l'entremise de la pose et de l'effectuation de la division: 800:32. De plus, les réponses des élèves montrent qu'ils ne font pas le lien entre les relations données et cette division. Très fréquemment l'élève se contente d'effectuer les trois opérations indiquées sur la donnée, **de façon totalement indépendante**. En général, les élèves refont tous les calculs mentionnés : 800 - 640 = 160 , 5. 32 = 160 , 800 : 32 = 25. Bien qu'il leur soit demandé si la réponse 15 est exacte, rares sont ceux qui songent à faire la vérification de la division: 800 : 32=15 comme il l'ont appris, c'est-à-dire en effectuant le produit 32x15 = ...

Des expériences ultérieures faites avec une autre variété d'énoncés ont pleinement confirmé ces résultats. Ces expériences seront relatées ailleurs.

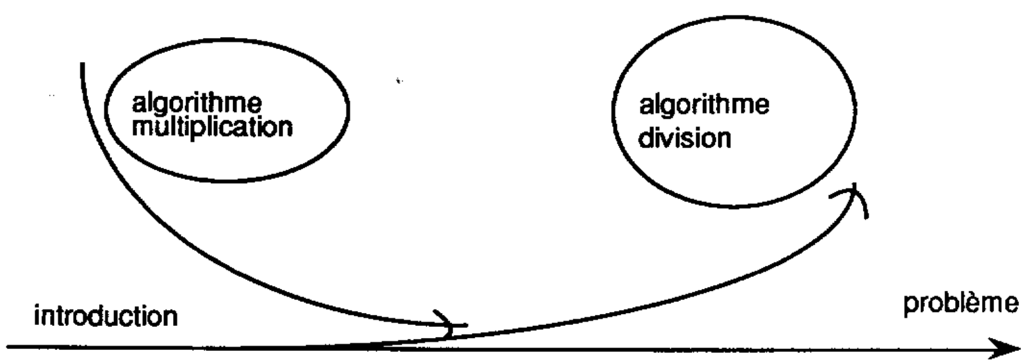
Ce qui frappe dans ces résultats, c'est bien sûr la faible mise en oeuvre de la division. Et pourtant on a pu vérifier que ces élèves savaient diviser relativement bien, de plus les problèmes étaient les derniers items d'une série portant tous sur la division, et les élèves auraient pu de ce fait en tirer un indice supplémentaire. Il semble cependant que ce qui a fait écran à ce recours consiste en les **indices repérables** dans les énoncés. Ces indices ont fonctionné ponctuellement, par exemple, un terme comme le mot **fois** glissé dans l'expression : *En tout combien de fois peut-on mettre 24 dans 552?* ou, à contrario, le terme **divisé** dans l'expression: *Puis j'ai divisé 800 par 32 et j'ai trouvé 15*. Là encore, ce qui frappe c'est que les élèves une fois engagés dans un type de résolution, ne semblent pas avoir changé de point de vue en cours de route, et ce malgrè le grand nombre de multiplications que certains ont du effectuer. On a bien l'impression que ces multiplications ont fonctionné comme des *routines* bien rôdées, réitérable a volonté. La même remarque peut être faite à propos des additions ou des soustractions successives. Ce qui frappe aussi c'est que les termes des problèmes sont exactement ceux que l'on prononce lors d'un calcul de division, et à ce titre ils auraient pu aussi bien évoquer **globalement** la situation de l'effectuation d'une division, plutôt que **ponctuellement** aiguiller le traitement sur telle ou telle *routine*. Enfin, il semble bien se confirmer que les relations évoquées dans les énoncés ont peu été exploitées par les élèves. Ainsi est-il tout de même étonnant de voir qu'une majorité ne pense qu'à multiplier pour résoudre le problème (a), alors que très peu songent à verifier par une multiplication le résultat: 800:32=15 au problème (c). Ceci est aussi à rapprocher de leur résolution de l'item ... : ...=95, examiné ci-dessus.

Pourtant, les rapports entre multiplication et division sont présents dès l'introduction de la division. Non seulement par l'affirmation que la division, c'est l'inverse de la multiplication, tous sauront vous le dire, mais encore parce qu'on leur a montré, pour motiver l'introduction à la division, que le problème était de trouver à inverser la table des multiples. D'ailleurs les élèves reconnaissent très bien ce problème au travers des énoncés, puisqu'ils s'engagent, à nouveau dans une suite de multiplications tâtonnantes. Cependant cette reconnaissance semble se faire plus au niveau d'indices que du sens, ce qui nous questionne quant à leur compréhension de l'introduction de la division. Enfin, tous savent aussi qu'on vérifie le résultat d'une division en multipliant le quotient par le diviseur (en y additionnant le reste, le cas échéant).

On voit bien ici que c'est la logique de l'enseignement qui est prise en défaut. Les analogies entre l'analyse de l'algorithme, l'organisation de l'enseignement (en phases de présentation d'exercice et de résolution de problèmes), les situations imaginées pour contrôler le sens attribué par l'élève à ces traitements, et le fonctionnement cognitif d'un sujet, ces analogies ne suffisent pas à assurer l'apprentissage. En effet cette rationnalité aurait voulu que le problème introductif, qui a motivé tout l'apprentissage de l'algorithme de division, ne soit désormais plus traité par le recours à des multiplications. Or il n'en est rien, pour celui-ci la mouture n'a pas pris chez une grande partie des élèves! Pourtant, entre temps, tous ont appris à diviser, avec en moyenne, une efficacité attestée. Certains se représentent même suffisamment bien cette procédure qu'ils peuvent chercher à l'inverser pour trouver deux facteurs qui divisés l'un par l'autre donnent 95. De plus, s'ils ne recourent pas à tel algorithme pour traiter une situation donnée, ils recourent à un autre algorithme.

Concernant cette résistance de procédures bien rôdées, on retrouve ici des observations rapportées depuis longtemps par G. Brousseau, puis par H. Ratsimba-Rajohn (<u>Etude de deux méthodes de mesures rationnelles: la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue de l'élaboration de situations didactiques.</u>) Mais plus aussi, puisqu'ici ce n'est pas tellement la difficulté de l'adoption de nouvelles procédures de traitement dont il est question, ni même de l'abandon d'anciennes stratégies pour le moins coûteuses. Il est en effet paradoxal que la situation même qui a mené à la division ne soit pas, en retour, traitée par cette technique une fois celle-ci installée (ce qui est bien le cas des élèves interrogés). C'est comme si les élèves avaient bien avancé dans le programme, mais pas par rapport à la situation qu'ils ont dû traiter pour parvenir à apprendre cette nouvelle technique ! Mais pourtant, et ça ajoute au paradoxe, les algorithmes appris (multiplication et division) sont tout-à-fait mobilisables par ailleurs. Cela ne veut-il pas dire que le début de leur apprentissage n'a pas coïncidé avec le début de l'enseignement? Et qu'ils ont appris à fonctionner sur le support algorithmique (système de symboles numériques disposés en diagramme, plus les règles de leur traitement), voire même à faire fonctionner ce support, plutôt qu'à construire une procédure type de traitement d'une situation divisive?

Revoilà aussi mon schéma de l'introduction :



Tout se passe comme s'il y avait deux plans. Celui du problème d'introduction, qui reste intact le long du déroulement du temps didactique (ligne horizontale du schéma), et celui des apprentissages scolaires, calculs de routine, qui en émergent comme à droite, la division, ou qui sont induits comme à gauche, la multiplication; mais qui ne se constituent ni comme réponse au *problème-enzyme,* et encore moins comme solution à quoi que ce soit. Je dirais même, mais ceci est encore à vérifier, qu'ils sont à eux tout seuls problème et solution.

On ne finit donc jamais de commencer: sur le premier plan, le problème reste inaltéré ; et, sur le second plan, les apprentissages qui émergent semblent être archaïques dès la naissance. Il y aurait d'une part, **la routine**, que ce soit celle d'apprendre ou celle d'enseigner (premier plan), et, d'autre part, **les**

routines qu'elle fait émerger comme apprentissages, laissées sur la grève (second plan).

QUELQUES CONSIDERATIONS SUPPLEMENTAIRES

Le second type de résultats que nous avons obtenu à ce jour est le suivant. Au travers de nos recherches, nous constatons qu'il est extrèmement difficile d'obtenir des élèves, soit en cours d'apprentissage, soit en fin d'apprentissage, qu'ils nous remémorent les activités au travers desquelles l'algorithme leur a été présenté, ce moment qui correspondrait au montage de la *procédure-type*. C'est comme si la disposition de *routines* occultait à leur yeux le processus au travers duquel ils ont passé, même récemment. On peut alors se demander où se situe la continuité qui les a amené de *la construction de la procédure-type* à *l'usage de la routine*. Serait-il même pensable qu'il y ait à ce point discontinuité ? Nous retrouvons ici le problème déjà rencontré qui consiste à concilier signification et fonctionnalité.

Concernant cette *amnésie*, nous devons préciser ceci. Elle se manifeste par une non-reconnaissance, qui elle-même peut être de différent types. Soit c'est la situation de référence, *partage par une procédure de soustraction successives*, qui n'est pas reconnue ; soit la situation est reconnue, et déterminée aussitôt comme étant divisive, mais c'est la *procédure de soustractions successives* qui n'est pas reconnue ; soit la situation et la procédure sont bien reconnues, mais la *procédure de division est considérée comme toute autre*, en tout cas pas comme pouvant dériver (ou, c'est le cas de le dire, procéder) de la *procédure de soustractions successives*. Nous n'avons jamais obtenu de la part des élèves interrogés cette dernière reconnaissance. De même, il nous a été très difficile d'amener les élèves à concevoir leur traitement en tant que *procédure* et non pas à se contenter de le considérer comme une suite plus ou moins longue d'*effectuations de calculs*. **Même lorsque nous leur présentons comme une méthode la *procédure de soustractions successives*, ou lorsque nous engageons les élèves à réfléchir à leur recherche tâtonnante d'un quotient par voie de multiplications itérées, les élèves ont de la peine à y trouver d'autre signification que le résultat à produire.** Par exemple ils indiqueront la dernière de leurs multiplication, isolée, lorsqu'on leur demandera de nous décrire leur méthode de résolution. De même, pour tous les élèves interrogés, le calcul d'une division est à ce point routinier qu'il contrecarre notre tentative de les engager sur une activité réflexive.

Revenons alors à la caractérisation des *routines* selon M. Saada-Robert. L'auteur écrit à ce propos : "Une routine n'en est pas moins un programme bien compilé, qui se déroule en tant qu'unité compacte, bloc non composable. Elle est liée au contrôle ascendant, car son guidage est assumé par les aspects particuliers de l'objet (tels qu'ils sont sémantisés par le sujet). "

Nous tenons là peut-être un début d'explication à *l'amnésie* des élèves. La question est en effet de savoir si lors de nos entretiens nous ne mobilisons pas des *routines* ; et alors à ce titre, l'*amnésie* observée ne serait-elle pas à rapporter à ces *routines* et au cadre situationnel ainsi établi, plus qu'à l'élève ? En effet comment voulez-vous prendre appui sur une *routine*, un tel *bloc non composable*, pour évoquer une entité d'une **autre** *nature fonctionnelle* ? La discontinuité résidant alors dans le changement de *statut fonctionnel* et ayant donc trait à la situation dans laquelle est évoqué le calcul, cette évocation amenant une fermeture de la situation elle-même sur *la réalité du support symbolique à ce calcul*. Rappelons que nous avons observé une telle fermeture, et relevé, au cours l'analyse des items décrits ci-dessus,la manière univoque dont les élèves engagent leur résolution. Mais c'est le phénomène d'amnésie qui nous paraît significatif, peu importe finalement de savoir à quel système il doit être attribué (à l'élève ou bien à notre interaction avec lui)! Tout se passe comme si le fait d'avoir *présente à l'esprit* la division, à titre *de routine*, bloquait sa *représentation*, sinon à titre d'opération, du moins à titre de *procédure-type*. Conformément à ce que nous avons vu, il est envisageable que cette discontinuité **porte sur l'objet appris: les élèves ayant appris le calcul de la division, et développé une *procédure type* pour traiter de cet objet, et pas tant d'une situation divisive**. Ceci revient à bien comprendre ce que les élèves ont appris à traiter, ou en d'autres termes, **sur quoi** ils fonctionnent. Dans ce cas la signification didactique de la troisième phase de l'enseignement (l'*usage*) serait d'opérer un changement de signification, et d'intégrer cette routine dans le traitement de situations divisives. Une sorte de reprise de la division, de ce qu'elle est censé résoudre. Nos investigations auraient alors surpris les élèves avant que cette élaboration n'ait été atteinte. Si ceci s'avérait exact, le début de l'enseignement prendrait une valeur toute nouvelle par rapport au schéma classique.

Or n'est-ce pas là l'expérience que nous-mêmes, adultes, enseignants ou didacticiens, avons tous fait, nous qui avons, en quelque sorte, *redécouvert* la division au travers de méthodologie d'enseignement, de manuels à l'usage des enseignants, ou encore d'articles spécialisés ? Que pouvons-nous dire sur les *débuts* de nos apprentissages en division, sur la manière dont on nous l'a présentée effectivement ? Rien d'autre que ce que nous pouvons déduire des ouvrages précités et de ce que nous pouvons penser comme une nécessité objective de la division. Par exemple l'évocation, même fugace, du partage, de la distribution et de soustractions successives, etc. Qu'est-ce donc qui nous aura permis de dépasser la situation d'*amnésie* ou nous étions tout comme nos élèves d'aujourd'hui plongés, si ce n'est un changement *fonctionnel* de notre objet, la division n'étant plus alors *savoir à savoir (effectuer)*, mais un *savoir à enseigner* ? C'est bien un tel type de redécouverte que relate E. Duckworth dans son article: Some Depths and Perplexities of Elementary Arithmetic.

Quelques mots maintenant concernant les recherches qui ont suivi celles relatées ici. Tout d'abord, nous nous sommes engagés à confirmer ces résultats. Par le recours à une autre batterie d'items, passés soit dans les mêmes conditions que ci-dessus, soit en entretiens individuels. Puis nous essayons d'examiner plus exactement les liens que nous pouvons faire entre les réponses obtenues aux items de calculs, et en particulier les erreurs, et les résultats aux items discutés ici. Nous cherchons aussi à lier ceci à l'analyse des manuels, analyse qui nous permet de faire certaines hypothèse quant au type d'enseignement effectivement reçu.

Actuellement, nous portons notre réflexion dans les directions suivantes. Toujours à la recherche de caractériser le substrat situationnel pour un élève à l'effectuation d'une division, nous nous demandons à quelles conditions le savoir d'un élève à propos de cet algorithme, pourrait participer à l'élaboration d'un savoir sur le nombre. L'enjeu que nous voyons à une telle question est bien sûr de trouver le moyen de s'assurer que l'apprentissage des algorithmes de calcul puisse être mis à profit de l'élaboration d'un savoir mathématique intéressant. Mais il est tout autant de trouver les moyen d'engager l'enseignement à s'intéresser davantage aux traitements mis en oeuvre par les élèves eux-mêmes. (Lorsque je dis l'enseignement, je veux dire que les conditions soient mises en place pour que l'intérêt de ces traitements soit reconnu tant par le maître que par l'élève lui-même.)

Dès lors trois voies d'investigation (non forcément exclusives ni divergentes) peuvent être suivies. 1° Tout d'abord un travail qui porte sur les moyens didactiques que l'on pourrait envisager pour favoriser l'explicitation par l'élève de ses propres procédures. Or ici on bute sur la force des *routines*. Il faudrait en effet pouvoir *faire ouvrir leurs propres routines* par les élèves. Une chose est certaine, c'est que les *routines* ne sauraient s'ouvrir d'elles-mêmes, elles ne sont pas réflexives. Rappelons alors que la phase de présentation de l'algorithme, dans l'enseignement procède bel et bien à une telle explicitation, mais elle n'est pas le fait de l'élève bien entendu. 2° L'autre voie d'investigation suivrait le fil de la construction décrite par le modèle fonctionnel. L'ouverture des *routines* se faisant par leur inscription dans l'élaboration de nouvelles *procédures-types*. Il convient donc de chercher les conditions permettant la transformation d'une *routine* en une *primitive*. Or comme nous l'avons vu, c'est bien là toute la question qui se pose au début de l'enseignement. Rappelons alors que le problème sur lequel nous nous achoppons ici provient du fait que dans la situation d'enseignement, l'algorithme lui-même devient un objet traité par l'élève... 3° La troisième voie, celle qui reçoit ma préférence, consisterait à mettre ces *routines* au sevice d'explorations numériques véritables, qu'elles soient donc des moyens de connaître le nombre, plus que de résoudre des problèmes d'arithmétique tous plus artificiels les uns que les autres. (Mais ceci ne requiert-il pas de la part de l'élève un changement de niveau dans sa réflexion?)

CONCLUSION : PRECONSTRUIT ET ALGORITHME.

Pour conclure revenons au thème de notre rencontre; *Les débuts d'un apprentissage,* et au décalage entre temps d'apprentissage et temps d'enseignement que recouvrent toutes les considérations précédentes.

Le temps de l'enseignement comme fiction: préconstruction et après-coup. tel est le titre du huitième et dernier chapitre du livre que Y. Chevallard a consacré à la Transposition Didactique (le lecteur se référera au résumé annexé à cet article). La première de ces propositions est celle-ci: "Le temps de l'apprentissage dément le temps didactique officiel." Nous retrouvons ici ce que nous avons déja dénoté entre apprentissage et enseignement. Il semble bien que nous nous achoppions ici à la fiction du temps didactique. Comme le dit la 9ème proposition de Y. Chevallard, dans le chapitre cité ci-dessus:

"La construction d'une théorie des situations adéquate suppose un changement de temporalité, ou plutôt la prise en compte du problème de l'articulation entre plusieurs temporalités non isomorphes."

Le modèle fonctionnel de la microgenèse que j'ai emprunté à M. Saada-Robert a pour moi une grande valeur, en ce sens qu'il intègre de manière simple et très satisfaisante les critères fonctionnels et la construction des procédures. Pourrait-on s'en inspirer pour les études didactiques et faire une analogie fructueuse? Bien que cela semble a priori tout à fait adéquat et possible, j'ai sans cesse buté dans mon entreprise sur les interrogations du type: à quoi appliquer ce modèle? qu'est-ce donc qui est construit en classe? Ce que j'ai résumé sous la forme de la question double: **qui fonctionne sur quoi ?** Fonctionnalité et élaboration ne semblent plus aussi facilement coïncider en didactique!

Comme nous l'avons vu, vient s'interposer la *réalité de l'objet enseigné*, qui double en quelque sorte la *réalité* traitée dans la situation divisive. Nous touchons là un point extrêmement sensible de toute entreprise d'enseignement des mathématiques. En premier lieu se pose la question fondamentale de la *réalité des objets mathématiques eux-mêmes*, et nous n'échappons pas à l'ambiguïté qu'il y a a vouloir faire apprendre aux élèves des objets de pensée. Quelle pensée se développe-telle dans une telle entreprise ? et quel est donc le lien entre cette pensée sur la pensée et la conceptualisation du réél ? En d'autres termes il est ici question de concilier deux regards portés sur l'algorithme, le premier le considérant comme un objet mathématique, le second comme un schème de la pensée. Donc l'élève ne commence pas par apprendre à résoudre une classe de situations divisives, mais il commence par *apprendre la division*. Ce savoir, *déjà-là*, pour reprendre l'expression de A. Rouchier, est donné préalablement, comme construit ailleurs et déjà tout déterminé. **L'élaboration de tout enseignement est une reconstitution.** Le dispositif d'enseignement a la charge d'amorcer, sous le contrôle sémantique et fonctionnel de ce *déjà-là*, l'apprentissage des élèves. Reprenons notre schéma classique de l'enseignement. Le début de l'enseignement, présente l'algorithme en le motivant par une situation (un partage à effectuer par exemple): « Voilà une situation divisive ». Du coup, voilà aussi la division installée, et l'enseignant ou même quelqu'un de ses élève peut en exhiber le diagramme. Pour le moment il n'y a en fait aucune procédure de constituée, ceci est pour plus tard, au moment où l'apprentissage commencera, avec la phase d'exercice, qui consistera essentiellement à *apprendre à faire comment on fait.* Le contrôle du dispositif d'enseignement s'établit bel et bien à la faveur d'un *double déjà là,* sémantique puis fonctionnel. On le voit, ce contrôle par le dispositif d'enseignement se paie au prix d'une interposition dans le rapport de l'élève à la réalité, la connaissance de ce dernier est sous tutelle d'une réalité instituée. Au cours de ce processus quelque chose sera effectivement construit, et, pour autant que le modèle microgénétique du fonctionnement cognitif soit correct, il pourra s'appliquer à rendre compte de cette élaboration.

Mais quelle connaissance est donc produite par une telle tutelle ? Une chose est certaine, elle s'est développée sous la dépendance étroite du dipositif d'enseignement et du découpage de la *réalité* (en *domaines de la pensée* séparés) qu'il institue. A la sophistication des *procédures* et *routines* ainsi construites correspond correlativement une absence quasi complète de construction des *situations* pour les faire fonctionner, une élaboration quasi nulle de la *réalité* qu'elles sont censées traiter. Cet état de dépendance des élaborations cognitives scolaires vient de ce qu'elles sont construites sur du *préconstruit,* et c'est ce qui fait l'artificialité d'une telle connaissance scolaire.

Ce sont J. Tonnelle et Y. Chevallard qui ont proposé d'utiliser la notion de *préconstruit* pour les analyses didactiques. Ils en font l'emprunt à la *théorie du discours* de M. Pêcheux et P. Henry. Voici tout d'abord ce qu'en dit M. Pêcheux, dans son ouvrage: Les vérités de La Palice, François Maspéro, Paris, 1975:p. 88, "C'est ce qui a conduit P. Henry à proposer le terme de « *préconstruit»* pour désigner ce qui renvoie à une construction antérieure, extérieure, en tout cas indépendante, par opposition à ce qui est «construit» par l'énoncé."puis p. 92 : "Nous conclurons cette première approche du problème du *préconstruit* en soulignant comme sa caractéristique essentielle la séparation fondamentale entre la *pensée* et *l'objet de pensée,* avec une préexistence de ce dernier, marquée par ce que nous avons appelé un décalage entre deux domaines de pensée, tel que le sujet rencontre l'un de ces domaines comme l'impensé de sa pensée, lui préexistant nécessairement. C'est ce que Frege exprime en disant qu' « un nom d'objet, un nom propre, ne peut absolument pas être employé comme un prédicat grammatical.»

Nous allons voir maintenant que cette séparation est en même temps, et paradoxalement, le moteur du processus par lequel *se pense l'objet de pensée*, c'est-à-dire le processus par lequel la pensée fonctionne selon la modalité du *concept...*"

Dans l'exacte perspective ouverte par cette citation de M. Pêcheux, je dirai que la connaissance scolaire dont il est question ici n'a pas le statut d'une conceptualisation du réél. Pour l'atteindre il faudrait en effet qu'elle permette au sujet de retrouver par lui-même, la nécessité du découpage préalable institué par le dispositif d'enseignement, c'est-à-dire retrouver la détermination inscrite dans l'objet appris, ou en d'autres termes, **construire la classe de situations** qui lui correspond. Lorsqu'il élabore l'introduction de l'algorithme de division par l'évocation d'une *situation-de-partage-par-distribution*, le pédagogue croit souvent qu'il procède à une explicitation de l'algorithme, alors que l'essentiel de sa démarche s'est déjà joué dans la construction de la situation de référence, et dans la conceptualisation du réél que cela suppose! On comprend donc bien pourquoi tout le monde s'accorde à penser que les choses décisives vont se passer dans la troisième phase d'enseignement, car c'est avec elle que semble se faire l'essentiel du travail de conceptualisation. A ceci s'est consacré G. Vergnaud tant du point de vue du montage de séquences d'enseignement, que dans l'élaboration de la théorie psychologique, je citerai à ce propos le n° 4.1 de <u>Recherches en Didactiques des Mathématiques</u>, Didactique et acquisition du concept de volume, et son article intitullé: Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. Par ailleurs G. Brousseau fait porter ses recherches sur ce point exactement, tant dans l'étude de la dévolution à propos de l'enseignement de la soustraction, c.f. son article: Le contrat didactique, le milieu, in <u>Recherches en Didactique des Mathématiques</u>, n° 9-3., qu'à propos de l'étude de la division, c.f. Représentations et didactique du sens de la division. In <u>Didactique et Acquisition des connaissances scientifiques</u>.Bien d'autres chercheurs pourraient être encore cités.

En didactique des mathématiques, c'est J. Tonnelle qui le premier, à ma connaissance, a développé une analyse à partir de la notion de *préconstruit*, dans son travail de DEA: <u>Le monde clos de la factorisation au premier cycle</u>, et particulièrement aux pages 61-63. Citons en un passage significatif."Or, le système didactique est ici la proie d'une <u>contradiction</u> au sens dialectique du mot. D'une part, il y a, inscrite dans la logique de cet enseignement, la nécessité de prendre pour base de l'enseignement de l'analyse à ce niveau, les fonctions polynômes. (...) D'autre part, il y a l'impossibilité d'identifier par une construction conceptuelle explicite la notion même de fonction polynôme. Cette impossibilité renvoie immédiatement à l'absence de la construction du concept de polynôme que les programmes officiels entérinent en n'introduisant pas le concept."On aura compris que les concepts de polynômes et de fonction polynômes vont être introduits à titre de *préconstruit*, sur lesquels va s'enseigner la factorisation. L'analyse de J. Tonnelle va laisser implicite une question: comment résoudre cette contradiction ? Faut-il préalablement construire le concept de polynôme ? Est-ce envisageable ? C'est cette question que reprend Y. Chevallard cette fois dans le chapitre 8 de son ouvrage sur la Transposition didactique. Voici comment:

"L'objet préconstruit est un objet dont le concept est absent. Il est présenté, son existence apparaît comme évidente, il est installé par monstration, dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose: il est un point d'appui inattaquable de la réflexion. (...) La préconstruction s'établit par le croisement d'énoncés du langage et de situations surdéterminées."

Cette caractérisation du rapport particulier entre le préconstruit et la situation qui lui sert de référence permet à l'auteur de contraster préconstruit et algorithme: "La préconstruction s'établit par le croisement d'énoncés du langage et de situations surdéterminées. (...) A l'autre bout de la chaîne, à la préconstruction s'oppose l'algorithmisation, où il y a coupure entre énoncés et situations. Le savoir scientifique se pose comme maîtrise de la dialectique entre énoncés et situations (dialectique qui suppose à la fois l'autonomisation des énoncés par rapport aux situations, ce qui l'oppose au statut de la préconstruction, et la mise en relation pertinente des énoncés et des situations, ce qui l'oppose à l'algorithmisation)." On peut donc faire le schéma suivant :

SAVOIR SCIENTIFIQUE

PRECONSTRUIT ← → ALGORITHME

synchrétisme énoncé/situation — décollement énoncé/situation

Chevallard concède cependant que : "Mais à un instant donné, un savoir scientifique quel qu'il soit fonctionne sur une strate profonde de préconstruit." C'est cette analogie avec l'avancée du savoir scientifique qui lui souffle alors la réponse à la question laissée en suspens par J. Tonnelle: "Le problème est celui qu'en histoire des sciences on a pu désigner par les noms de *refonte* ou de *reprise*. En ce qui concerne la psychologie, il semble que le problème ait été évité à partir de deux restrictions sur les types d'études menées : études *d'apprentissages courts*, études de schèmes (leur genèse, évolution, connexions, etc.) plus que de *contenus de savoir* particuliers. Si la temporalité de la psychogenèse substitue une durée intégrative à une durée simplement cumulative, elle n'en reste pas moins irreversible, alors que le temps de l'enseigné semble aussi être fait de réorganisations." Puis enfin: "La nécessité de reprises *d'acquis antérieurs*, à la lumière d'expériences ultérieures, peut être située du côté de l'activité propre du sujet.(...) Mais la réélaboration est une nécessité qui tient à ce que l'on a appelé la préconstruction du savoir."Dès lors le schéma que préconise Y. Chevallard pour penser l'enseignement s'écarte résolument du schéma classique. Le début d'un enseignement n'est pas, pour lui, une phase de construction, mais une phase d'installation, de mise en présence de l'élève face à l'objet à apprendre. La conceptualisation ne peut que succéder à l'initiation.

Toutes les considérations que j'ai développées jusqu'à ce point montre que je partage ce point de vue. Cependant, Y. Chevallard nous laisse sur l'invocation d'un *effet d'après coup*, et ceci ne saurait me suffire! Si l'on suit le raisonnement de Y. Chevallard, et l'opposition entre *préconstruction* et *algorithmisation*, l'entreprise d'enseignement des algorithmes, et plus généralement l'algorithmisation de l'enseignement mainte fois remarquée, nous placent devant un paradoxe: par quel tour de passe passe l'enseignement peut-il installer un algorithme en procédant par préconstruction ? L'enseignement aurait-il lui aussi toute la maîtrise que Y. Chevallard attribue en la matière au savoir scientifique ? Ne vaut-il pas mieux de parler de *déjà-là*, et d'inscrire ces considérations dans la perspective de l'institutionnalisation, comme A. Rouchier le propose, puisque ce *préconstruit* n'est pas seulement donné, apposé, mais joue encore le rôle de cadre organisateur de l'enseignement (au travers de contrôles du sens ou du fonctionnement) ?

Quoiqu'il en soit, les questions qui m'importent sont du type suivant: comment penser l'enseignement pour amener les élèves à engager le travail de conceptualisation ? Comment assurer qu'à un moment donné l'enseignement puisse reculer l'*horizon du préconstruit* et ne pas se contenter de cumuler les *préconstruits* au fur et à mesure de son parcours du savoir? Ceci nous ramène donc à la question centrale de caratériser le *jeu savoir-situation* qui y a cours. Le mot *routine* a bien entendu cette connotation propre à l'algorithmisation, et sa possibilité de "fonctionner à vide", décollée du substrat situationnel. Cependant, il est difficile d'envisager qu'une procédure aussi complexe que le calcul d'une division puisse se mettre en place en étant d'emblée décollée de toute situation. Dès lors que se passe-t-il vraiment au cours de l'enseignement? Comment le processus d'apprentissage scolaire se déroule-t-il? Le processus de réélaboration postulé par Y. Chevallard n'est-il pas, dès le départ, inscrit dans les processus d'enseignement et d'apprentissage ? Et concernant les modèles psychologiques, il me semble que cet auteur va un peu vite en besogne. A ce titre je ferai remarquer que les considérations didactiques que j'ai développées pour montrer la complexité qu'il y a à penser l'enseignement n'invalident en aucune manière les modèles psychologiques. Par exemple, nous avons vu que l'enseignement ne pouvait éviter de s'interposer dans le rapport de l'élève à la réalité. Mais ceci les psychologues ne l'évitent pas non plus dans leurs observations: ainsi cet *effet de préconstruit* que nous avons dénoté à propos de l'enseignement, se peut-il vraiment qu'il n'affecte pas l'expérimentation psychologique ? Non. Donc si le modèle fonctionnel a une certaine pertinence relativement à ce champ d'expérimentation, la dénotation du *préconstruit* ne saurait en soi les rendre impertinent relativement au champs didactique. Ceci nous force à admettre que l'on développe *sa connaisssance du réel* à apprendre des *objets de pensée* : on apprend réellement quelque chose de mathématique en apprenant à effectuer une division en colonnes. Les processus que nous essayons d'atteindre possèdent donc bien quelque part une sorte de réflexivité, la conceptualisation est sans doute déjà en oeuvre dès les débuts de l'enseignement. Peut-être procèdent-ils selon un modèle récursif comme le propose T. Kieren.

Ce sont ces considérations qui nous poussent à examiner de manière approfondie l'enseignement et ce qui s'y passe. Quatre faits que nous avons pu observer nous encouragent à poursuivre dans cette voie:

1.- Au travers d'analyses conjointes des erreurs des élèves et de leurs réponses aux problèmes que nous avons imaginés, nous réussissons patiellement à déterminer quel type de connaissance recouvre l'apprentisage des algorithmes.

2.- Les élèves les plus avancés, ceux qui maîtrisent le mieux les *routines,* sont aussi ceux qui sont le plus à même d'amorcer le *travail de conceptualisation..*

3.- Il semble bien que dans la résolution des problèmes que nous avons posés, nous retrouvions chez les élèves un fonctionnement analogue à celui des maîtres lorsqu'ils lisent dans leur manuel de méthodologie, la présentation de la division...

4.- Les choses semblent à ce point réflexives que nous, c'est-à-dire notre équipe de recherche, ne cessons pas non plus de découvrir, **après coup**, tout ce que recouvre une division.

Ceci n'est donc pas une..

FIN.

BIBLIOGRAPHIE DES TEXTES CITES

BROUSSEAU G. : Représentations et didactique du sens de la division. In *Didactique et Acquisition des connaissances scientifiques.* Actes du Colloque de Sèvres. Mai 1987. 47-64. La Pensée sauvage 1988

BROUSSEAU G. Le contrat didactique, le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 9-3, 1990. pp. 309-336.

CHEVALLARD Y. *:La Transposition Didactique.* , Grenoble, La Pensée Sauvage, 1985.

CONDORCET : *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité.* , Paris, A.C.L. - éditions, 1989.

CONNE F., BRUN J. : Content and Process: the case of teaching written calculation at primary school, Actes du symposium *Responsible and Effective Teaching*, Fribourg sept. 3-7, 1990.

DUCKWORTH E. : Some Depths and Perplexities of Elementary arithmetic, *Journal of Mathematical Behaviour*, n°6, pp 43-94, 1987

KIEREN T. :Personal knowledge of Rational Numbers: Its intuitive and Formal development, in *Number Concepts and operations in the Middle*

Grades. The national Concil of teachers of Mathematics, Inc, Lawrence Erlbaum, 1988.

PECHEUX M. : *Les vérités de La Palice*, François Maspéro, Paris, 1975.

RATSIMBA-RAJOHN H. : Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 3.1, pp.65-113, la pensée Sauvage, Grenoble, 1982.

RATSIMBA-RAJOHN H ,*Etude de deux méthodes de mesures rationnelles: la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue de l'élaboration de situations didactiques.* 1981, Thèse, Université de Bordeaux I, Irem Bordeaux.

ROUCHIER A.L'institutionnalisation des savoirs dans l'enseignement des mathématiques, in *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itérativo-récursives, institutionnalisation.* Thèse de doctorat d'état, Université d'Orléans, UFR: Sciences Fondamentales et Appliquées, Orléans 1991, pp. 26-71.

SAADA-ROBERT M. : La microgenèse de la représentation d'un problème, *Psychologie Française* n° 34 2 / 3 , Septembre 1989 , pp. 193-206

TONNELLE J. :*Le monde clos de la factorisation au premier cycle*, mémoire pour le DEA de didactique des mathématiques, IREM Aix-Marseille et IREM Bordeaux, 1979.

VERGNAUD G. et alii Didactique et acquisition du concept de volume, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°4.1, 1983, Grenoble, La Pensée Sauvage.

VERGNAUD G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation, *Psychologie française*, n° 30-3/4, Armand Colin, Paris, nov 1985, pp. 245-252.

ANNEXE:

RESUME EN 19 PROPOSITIONS DU CHAP 8 DE L'OUVRAGE: La transposition Didactique, de M. Y. Chevallard.(1985)

Dans son ouvrage sur la Transposition Didactique, Y. Chevallard évoque la question des algorithmes au chapitre 8, intitulé: "Le temps de l'enseignement comme fiction: préconstruction et après coup." Examinons très succintement l'argumentation de ce chapitre.

1 - Le temps de l'apprentissage dément le temps didactique officiel.

2 - L'enseignant doit croire d'une certaine manière, à la fiction de la durée didactique dont il est l'ordonnateur. Certains psychologismes viennent supporter cette fiction.

3 - La mise en évidence d'une distorsion de la norme temporelle par la réalité des apprentissages n'émane qu'exceptionnellement de l'instance enseignante proprement dite : elle est le fait d'un regard porté sur la relation didactique d'un point proche mais extérieur, porté pour faire surgir *l'inadaptation* du système didactique, ou porté par l'analyse scientifique elle-même.

4 - C'est l'affaire de la transaction, qui vient réaliser l'auto-régulation du système didactique, que de s'arranger avec ces faits, patents, qui viennent nier la temporalité affichée par lui. Un moyen général de négociation est l'algorithmisation. (c.f. chap. 7-11 et 7-12)

5 - La normalisation, imposée par le temps didactique légal à l'appréhension de la temporalité des apprentissages, prend appui sur le découpage du savoir résultant de la mise en textes qui fonde le temps didactique.

6 - Pour explorer le temps de l'enseigné en sa structure particulière, on peut partir de la question suivante: s'il y a deux régimes de savoirs, articulés en synchronie selon des mécanismes transactionnels pour permettre la fiction du temps didactique légal, comment d'un élève toujours soumis au registre épistémologique qui définit sa place d'enseigné, peut-on un jour faire un professeur de mathématiques ?

7 - Le problème est celui qu'en histoire des sciences on a pu désigner par les noms de *refonte* ou de *reprise*. En ce qui concerne la psychologie, il semble que le problème ait été évité à partir de deux restrictions sur les types

d'études menées : études *d'apprentissages courts*, études de schèmes (leur genèse, évolution, connexions, etc.) plus que de *contenus de savoir* particuliers. Si la temporalité de la psychogenèse substitue une durée intégrative à une durée simplement cumulative, elle n'en reste pas moins irreversible, alors que le temps de l'enseigné semble aussi être fait de réorganisations.

8 - Il existe un modèle de temporalité qui autorise des retours réorganisateurs radicaux: c'est le concept freudien d'après-coup. Ce modèle semble être éclairant lorsqu'il est appliqué à des réorganisations cognitives.

9 - La construction d'une théorie des situations adéquate suppose un changement de temporalité, ou plutôt la prise en compte du problème de l'articulation entre plusieurs temporalités non isomorphes.

10 - La nécessité de reprises *d'acquis antérieurs*, à la lumière d'expériences ultérieures, peut être située du côté de l'activité propre du sujet.

11 - Mais la réélaboration est une nécessité qui tient à ce que l'on a appelé la préconstruction du savoir.

12 - L'objet préconstruit est un objet dont le concept est absent. Il est présenté, son existence apparaît comme évidente, il est installé par monstration, dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose: il est un point d'appui inattaquable de la réflexion.

13 - La préconstruction s'établit par le croisement d'énoncés du langage et de situations surdéterminées.

14 - A l'autre bout de la chaîne, à la préconstruction s'oppose l'algorithmisation, où il y a coupure entre énoncés et situations. Le savoir scientifique se pose comme maîtrise de la dialectique entre énoncés et situations. Mais à un instant donné, un savoir scientifique quel qu'il soit fonctionne sur une strate profonde de préconstruit.

15 - Lorsqu'il y a crise, la nécessité se fait sentir d'une reprise du savoir antérieur, dont la préconstruction n'est plus suffisante, parce que son inaptitude à donner prise à un questionnement scientifique apparaît.

16 - Il en va de même dans l'enseignement des mathématiques, quoiqu'il faille alors les étudier de manière spécifique.

17 - La manipulation des préconstruits est définie par un code de conduite qui n'est efficace qu'à ne pas être explicité: pour chaque situation particulière, une conduite particulière, sans qu'on puisse décontextualiser ces

conditions afin d'en dresser une liste. Le savoir préconstruit est fragile parce qu'il ne supporte pas la variation.

18 - Pour accéder à un statut qui le fasse entrer dans une activité théorique où il soit mis en débat, il devra être repris, construit.

19 - Le préconstruit est la manifestation -éventuellement archaïsante- de notre savoir passé au sein du présent.

LES CONTRAINTES DIDACTIQUES ET L'APPRIVOISEMENT DU NOUVEAU: UN EXEMPLE EN PHYSIQUE

Par Samuel Johsua
Groupe de Recherche en Didactique de la Physique
Université de D'Aix-Marseille II

Malgré d'indéniables divergences entre eux, la plupart des épistémologues et historiens des sciences ne retiennent pas l'hypothèse d'une inférence simple, univoque, voire "naturelle" susceptible de conduire des données observationnelles à la théorie modélisée. C'est, plus largement, le double postulat de base du positivisme logique (existence d'une base observationnelle complètement indépendante de toute théorie et possibilité de réduire toutes les données théoriques à des données observables) qui est remis en cause (Carnap, 1952). Pour de nombreux auteurs, dans la science physique, il n'y a pas de possibilité de penser une expérience indépendamment d'une théorie. Le plus souvent, une expérimentation est imaginée dans le cadre très particulier d'une théorie (ou d'un modèle) qui lui fixe son objet et même son sens. Quand ce n'est pas le cas, la pertinence des observations (fussent-elles "fortuites") dépend, elle aussi, étroitement de l'état de la théorie au moment de l'expérience (Koyré, 1968 ; Bachelard, 1949 ; Kuhn, 1970 ; Popper, 1973 ; Lakatos, 1976; Lévy-Leblond, 1971 ; Halbwachs, 1974).Or, ce statut de l'expérience est inévitablement remis en cause dans un cadre didactique. Il l'est, bien sûr, dans le cadre des options inductives, par essence pourrait-on dire; mais la validité de cette remarque est plus générale. En effet, dans un cadre didactique, la théorie (ou le modèle) est au bout du processus, pas au début. Certaines expériences au moins doivent fictivement être présentées comme "premières", distinctes d'une théorisation, qui, justement, est censée se bâtir à leurs propos.

Option "synthétique" et option "analytique"

Un premier choix se présente ainsi pour un enseignement de la physique avec une composante expérimentale.

Renoncera t-on (au moins fictivement) aux liens qui unissent modèles et phénomènes ? On choisira alors une option didactique que nous appelerons *"analytique"*. Choisira-t-on au contraire de maintenir la liaison entre les deux comme épine dorsale de l'enseignement ? on aura alors ce que nous appelons l'option *"synthétique"* . Celle-ci vise à une introduction simultanée des aspects conceptuels et phénoménologiques.

Etant donné la rareté pratique de l'option synthétique (en dehors de travaux de recherche), c'est *l'option analytique que nous considèrerons uniquement dans la suite du texte.*

Le problème de la didactification des objets de savoir ne se pose pas pour l'option analytique : elle en est la source pour ainsi dire. Elle se traduit par les mécanismes généraux de la transposition didactique, dont le fonctionnement a été étudié avec précision en mathématiques (Chevallard, 1980; Chevallard et Johsua ,1982).

De façon semblable en physique, elle se traduit par la rupture temporelle entre les expositions didactiques du phénomène et celle du (ou des) concept, par la séquentialisation des niveaux d'approche du problème, la "désynthétisation" du modèle savant en vue de son introduction progressive,ce qui aboutit à des cadres épistémologiques fort différents selon les cheminements choisis (Johsua,1985).

Mais au sein même de cette option analytique deux options sont encore disponibles selon le "point de départ" choisi: le "modèle" ou "l'expérience".

La première peut se trouver à des niveaux universitaires (introduction de l'électromagnétisme par les équations de Maxwell),mais aux niveaux scolaires que nous analysons, il n'est jamais pratiqué.

C'est pourquoi nous nous limiterons dans la suite du texte à l'étude des rapports à l'expérimental, dans le cadre d'une option analytique à point de départ expérimental .

L'INDUCTIVISME

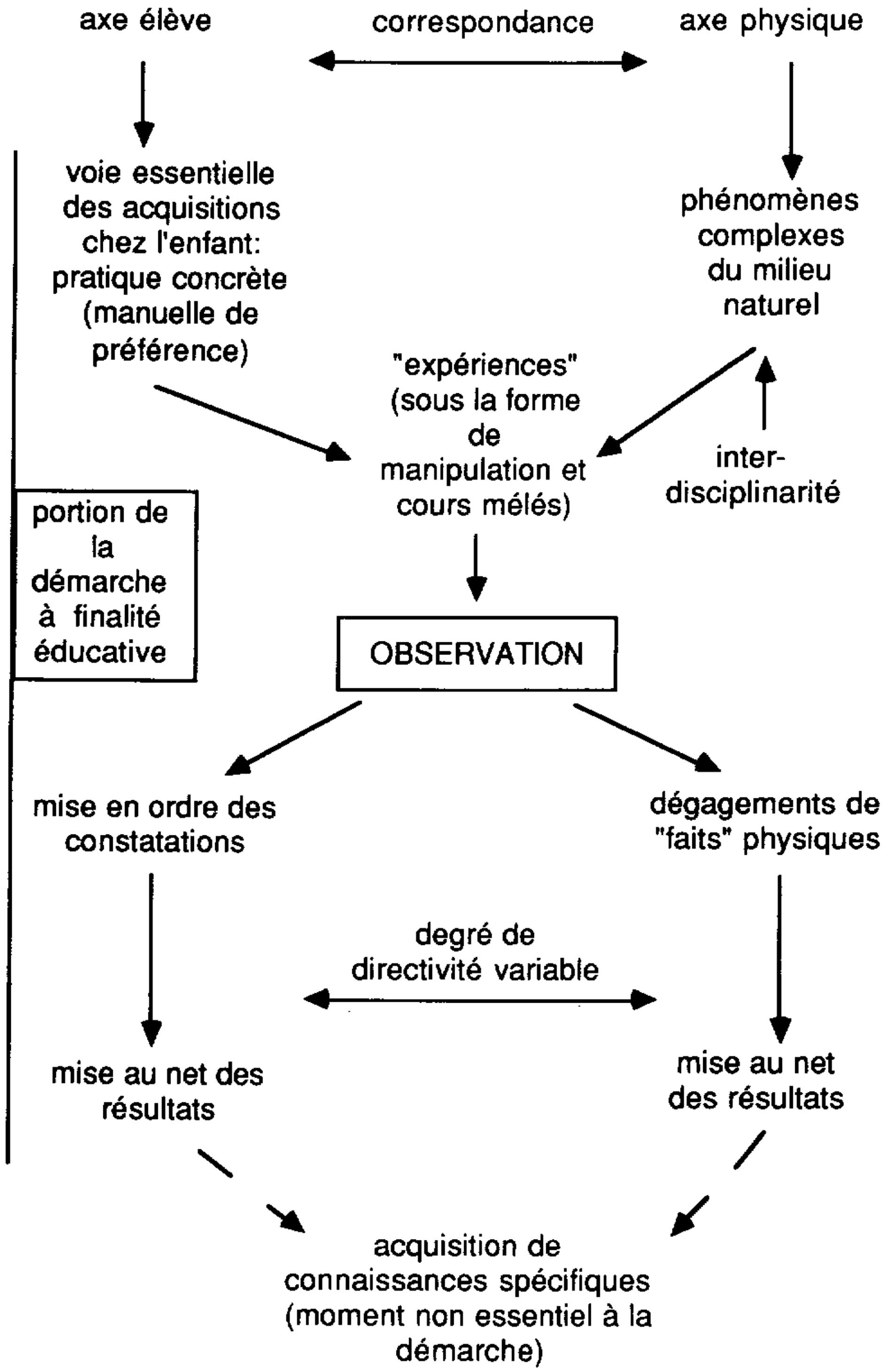
Le rapport à l'expérimental apparaît comme permanent et massif dans l'enseignement de la physique au niveau secondaire.

On peut, sans grande audace, avancer l'hypothèse que, pour une majorité de pédagogues, l'enseignement de la physique se confond avec celui de la "méthode expérimentale", et cela jusqu'à nos jours. Cette finalité fixée à l'enseignement de la physique va le plus souvent de pair avec la réduction de la "méthode expérimentale" elle-même aux processus d'induction.

Il y a là une option lourde concernant l'épistémologie de la physique qui fut majoritairement admise dès la deuxième moitié du XIXe siècle et n'a cessé de s'approfondir depuis. Vers le milieu de ce siècle, cette option a cessé de concerner uniquement la physique elle-même, pour englober les processus d'apprentissage des enfants, qui, eux aussi, seraient de caractère inductif. Il y aurait ainsi une "voie naturelle" pour l'apprentissage des sciences, où doivent être privilégiées toutes les catégories de l'induction (observation, mesures, comparaison, généralisation, etc) au sens classique du positivisme d' A.Comte (1830). La puissance de ce véritable paradigme pédagogique concernant les sciences n'est nullement récente ou limitée à certains pays. Elle atteint souvent la portée d'un véritable "mythe", que l'on peut résumer dans le schéma 1.

Dans ce schéma idéal, il n'y a pas de difficultés intrinsèques à l'abord de la physique, aux modes de raisonnements des élèves, ni à la mise en correspondance entre l'une et les autres. La méthode est de plus passe-partout, puisque les contenus précis soumis à analyse sont de peu d'importance (et ne sont pas d'ailleurs un objectif réel de l'apprentissage). Les seules difficultés envisageables se situent au niveau pédagogique et non au niveau scientifique.

Comme nous l'indiquions ci-dessus, ces prescriptions pédagogiques sont fort anciennes. Mais il est vrai, en revanche, que leur mise en oeuvre sur une grande échelle a été plus lente et que ce n'est que récemment que le sentiment de leur inadéquation a dépassé la sphère des didacticiens (Johsua, 1985).


axe élève
correspondance
axe physique
voie essentielle des acquisitions chez l'enfant: pratique concrète (manuelle de préférence)
phénomènes complexes du milieu naturel
"expériences" (sous la forme de manipulation et cours mélés)
inter-disciplinarité
portion de la démarche à finalité éducative
OBSERVATION
mise en ordre des constatations
dégagements de "faits" physiques
degré de directivité variable
mise au net des résultats
mise au net des résultats
acquisition de connaissances spécifiques (moment non essentiel à la démarche)

Crise de l'inductivisme

Cette mise en oeuvre s'est généralisée à l'occasion des débats "réformateurs" des années 70 et, en même temps, l'option idéologique inductiviste est entrée en crise. Pourtant l'inductivisme constituait un paradigme commun à tous les pédagogues de la physique. Il avait l'avantage d'homogénéiser l'épistémologie de la physique, le mode d'apprentissage des enfants et les finalités de l'enseignement de la physique. Cette homogénéité s'est brisée quand ces trois questions ont été, séparément dans un premier temps, soumises à de vigoureuses analyses critiques. En particulier, la prétention des physiciens à rénover l'enseignement dans la perspective d'une physique "structurelle" s'est révélée difficilement compatible avec l'idéologie inductiviste. Celle-ci repose en effet sur la croyance que l'observation et la mesure sont à la base de la "mise en évidence" des lois physiques, et qu'il est possible de créer un cadre scolaire artificiel où l'élève, bien dirigé, serait apte à faire, en raccourci, ce même cheminement. Cette opinion, déjà contestable en général, rencontre des difficultés insurmontables quand la physique qu'il faut atteindre par ce biais n'est plus une phénoménologie descriptive simple, mais une modélisation relativement complexe.On n'échappe pas si aisément aux conséquences de cette "coupure" introduite à des fins didactiques. Il y a bien là une contrainte générale, dès lors que l'on fixe à l'enseignement "expérimental" la transmission (et l'acquisition par l'élève) d'un corpus de connaissances structuré, autrement dit un "modèle".

EXISTENCE DE CONTRAINTES DIDACTIQUES DANS LE RAPPORT A L'EXPERIMENTAL: LA PROPOSITION DU PROBLEME.

Cette critique des options inductivistes, pour justifiée qu'elle soit, ne doit pas nous faire perdre de vue que des limitations générales existent du fait même du choix analytique, et marquent donc la nature même des actes d'enseignement en relation avec l'expérimental (et, peut être, d'une manière spécifique selon la discipline).Si cela est, ces contraintes vont peser sur tout choix didactique. Peut-être joueront-elles différemment selon les hypothèses psychologiques, épistémologiques et éducatives retenues : mais elles joueront.

Quand la classe débute, elle dispose d'emblée du problème sur lequel on va s'interroger. Or, ce simple fait relève d'un travail didactique considérable, sinon décisif. L'existence même de problèmes à résoudre n'est pas une donnée naturelle. C'est d'abord un donné scientifique et ensuite un donné didactique.

Dans la vie courante des élèves, les problèmes à résoudre peuvent être simples, complexes ou même insurmontables : mais ils appellent rarement la construction d'un savoir cognitif, spécifique et surtout conscient. L'existence du problème dans la classe ne va pas de soi ; c'est une construction externe à la classe, qui donc nécessite ensuite d'être - didactiquement - transmise et acceptée par elle. C'est cette transmission que Brousseau (1980) désigne sous le nom de "dévolution du problème" ; nous l'appellerons ici "proposition" (sous entendu : par le professeur).

Les phénomènes de la physique et la "monstration"

Le problème de la classe de physique n'est pas un problème naturel - au sens où il serait naturel que la grande majorité d'une classe d'âge le ressente comme un problème à résoudre. Le ciel est bleu pour tout le monde : ce n'est qu'en classe de physique que cette couleur devient "un problème". Ce problème est donc, d'abord et avant tout, un problème scientifique. Mais c'est aussi un problème didactique, car il est posé à l'école, en classe de physique, en vue d'apprendre la physique.

Cette question est fondamentalement liée en physique à celle de l'expérimental. Sauf à des niveaux scolaires relativement élevés, le problème à considérer se présente en général sous l'aspect d'un "phénomène" à étudier.

Le credo positiviste considère que les phénomènes sont des données, livrées aux sens humains, puis à l'observation méthodique. Mais, dès qu'il s'agit de phénomènes analysables - et non de ces phénomènes très globaux et donc complexes comme les orages - leurs liaisons avec les modèles de la physique deviennent en réalité trés serrées.D'un certain point de vue, c'est le modèle qui donne son statut non au phénomène naturel, mais au phénomène analysable.

En l'absence initiale du modèle, (laquelle est caractéristique de l'option analytique), l'établissement du phénomène pose, lui aussi, un problème didactique. Il paraît donc inévitable d'en revenir à la primauté du phénomène. *Didactiquement, cela se traduit par ce que nous appelons le mécanisme de la "monstration". Celle-ci a deux fonctions intimement liées : elle permet la proposition du problème, elle établit le phénomène de départ.*

La proposition du problème :

La monstration permet au professeur de présentrer un problème et de prétendre résolu celui de sa transmission comme problème non du professeur, mais de la classe. Les sources de la monstration peuvent être diverses, sans affecter pour autant le mécanisme : montrer qu'il y a un problème. Ainsi, le professeur fait-il constater qu'un objet pesant laché d'une certaine hauteur va (en général ...) tomber vers le sol. Ceci, qui était connu de tous, mais n'était pas "un problème", le devient par sa simple énonciation en classe de physique.

Le professeur construit (ou fait construire) un circuit de simple allumage pile/ampoule : il désigne par là un problème qui n'existait nullement auparavant, en tout cas pas sous son aspect de problème de physique. Par la même démarche, d'un seul mot parfois ("pourquoi", "comment"), cela est censé être devenu le problème de la classe, et deviendra l'objet du discours.*La "monstration" permet donc de réaliser ce pas si important, pouvoir dire : "voilà un problème, et c'est désormais le nôtre".*

La désignation du phénomène :

La monstration permet en même temps une présentation du *phénomène*, qui le désigne comme pertinent, au milieu d'une multitude d'autres phénomènes possibles. Ce qui ne serait pas possible par un discours l'est ici par la monstration. De la même manière, les linguistes distinguent une phase primaire, dite "déïctique" où un signifiant particulier est accolé à un référent particulier par désignation (Cauty, 1983).De même, ici, le phénomène n'est pas syntactiquement inserré. Il est, au mieux, le meilleur représentant d'une classe semblable de phénomènes. Le plus souvent d'ailleurs même pas : il demeure unique en son genre.

Les contraintes didactiques sur la monstration.

Toute monstration n'est pas apte à réaliser correctement une introduction du problème et une désignation de phénomène. Il y a à cela des conditions qui sont autant de contraintes à respecter :

- La première tient à la possibilité de *reconnaissance* de la monstration par la classe. Celle-ci n'avait pas repéré un problème dans le phénomène montré avant qu'il ne le soit : mais elle doit pouvoir le reconnaître dès qu'il l'est. Pour cela, il est nécessaire que la monstration se présente comme un lien entre le connu et l'inconnu. Les éléments de la monstration doivent relever du connu (s'ils ne le sont pas, ils devront d'abord faire eux-mêmes l'objet d'une monstration, ou d'une construction cognitive). L'agencement des éléments représente lui le nouveau, l'inconnu : le problème. C'est ainsi qu'il faut comprendre toutes les insistances que l'on peut noter sur la nécessité de partir de phénomènes "familiers".

- La seconde tient à la possibilité de *l'admission du problème*, à la possibilité de sa transformation en problème de la classe. Pour cela, il est nécessaire que le phénomène montré ne soit ni étranger à l'élève, ni surtout en référence avec un objet d'enseignement trop *vieilli.* Au premier chef, le risque est celui d'un vieillissement didactique de la situation expérimentale : la même situation peut difficilement servir à introduire de nouveaux problèmes (alors que c'est très souvent physiquement possible). Mais il concerne aussi le recours à des appareils , un vocabulaire "du passé".

- La troisième contrainte concerne la structure du phénomène lui-même. Celui-ci doit concerner une situation relativement simple, ou décomposable aisément en situations simples. Il faut donc qu'il y ait une *correspondance entre la monstration d'une situation et le phénomène* que l'on veut exhiber. De la même façon, il ne faut pas que des éléments non pertinents de la monstration puissent venir perturber la prise de conscience des éléments pertinents. Et ceci doit être présent dès la monstration elle-même (sans besoin de précisions supplémentaires, compte tenu du niveau cognitif des sujets).

Ainsi, a priori, une infinité d'éléments pourraient jouer un rôle dans la perception d'un montage pile/fils/ampoules. Des éléments extérieurs au circuit d'abord (la température ambiante de la classe, le bruit, etc...). Des éléments du circuit lui-même (la couleur des fils par exemple); mais une monstration est surtout "efficace" par ce qu'elle élimine sans le dire.

Et pour cela, elle doit à nouveau être "simple"

C'est que l'objectif de la monstration ne réside pas en elle-même; la manifestation du phénomène est un moment éphémère vers le dégagement de bases observationnelles communes à la classe (les "faits" de la démarche positiviste).

Dans l'option analytique, ce dégagement des éléments pertinents est une étape pour avancer vers la conceptualisation. Cela doit se comprendre non dans un sens objectif (une même monstration peut recéler de multiples éléments pertinents dans un même domaine de la physique selon le niveau où l'on se place) mais dans un sens didactique : les "faits" fixent la base réputée commune sur laquelle la classe peut avancer.

Conclusion.

Sur l'exemple que nous venons de présenter, il apparaît que le projet d'enseignement impose des contraintes finalement assez pesantes sur les didactiques possibles. Il faut, en conséquence, se garder de critiques trop hâtives du mode de fonctionnement "traditionnel".

Cela ne signifie pas que toute modification soit impossible. Mais seulement qu'elle doit respecter des règles sous peine de conduire à une impasse. Le travail de la didactique est justement, en grande partie, de mettre en évidence, d'analyser, et de préciser les dites règles.

REFERENCES

- Bachelard G., 1949, *Le rationalisme appliqué* Ed. PUF, Paris

- Brousseau G., 198O, "Problèmes de l'enseignement des décimaux", *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 1(1).11-59.

-Carnap R., 1952, *The continuum of inductive methods,* Ed Erlbaum New York

- Cauty A., 1982, "Etude de certains aspects linguistiques et didactiques del'énonciation mathématique", Thèse 3e cycle, Paris VII.

- Chevallard Y., Johsua M.A., 1982, "Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(2). 159-239.

- Chevallard Y., 198O, "La transposition didactique", 1ère Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Chamrousse.

- Comte A., 183O, *Cours de Philosophie Positive*, Bachelier, Paris.

- Halbwachs F., 1974, *La pensée physique chez l'enfant et le savant.*Delachaux et Niestlé.

- Johsua S., 1985, "Contribution à la délimitation du contraint et du possible dans l'enseignement de la physique (essai de didactique expérimentale)". Thèse d'Etat, Aix-Marseille II.

- Koyré A., 1968, *Metaphysics and Measurement,* London.

- Kuhn T.S., 197O, *La structure des révolutions scientifiques*, Payot, France.

- Lakatos I., 1976, *Proofs and Refutations, the Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press (Traduction française : *Preuves et réfutations*, Hermann, 1985).

- Levy-Leblond J.M.,1971, Physique et Mathématique in *Encyclopédia Universalis.*

- Popper K., 1973, *La logique de la découverte scientifique*. Payot, Paris.