Publié dans Interactions didactiques 5, 1-167, 1984
qui doit être utilisé pour toute référence à ce travail

FORMULATIONS ECRITES ET RESOLUTION DE PROBLEMES ADDITIFS

ANALYSE DE LEUR ÉLABORATION ET DE LEUR CONTENU

INTERACTIONS DIDACTIQUES No 5

JUILLET 1984

Ces recherches ont été rendues possibles grâce à l'appui du FNRS:
pour la première partie, contrat no 1.738.083 (A.-N. Perret-Clermont);
pour la seconde, contrat no 1.706.078 (A.-N. Perret-Clermont et J. Brun).

TABLE DES MATIERES

INTERACTIONS DIDACTIQUES No 5

PRESENTATION — I
M.-L. Schubauer-Leoni

FORMULATIONS ECRITES DE PROBLEMES ADDITIFS ET INTERACTIONS SOCIALES — 1
M.-L. Schubauer-Leoni et M. Grossen

L'ELABORATION DES FORMULATIONS DANS UN JEU EN ARITHMETIQUE — 1
E.-H. Saada et J. Brun

BIBLIOGRAPHIE — I

LISTE DES PUBLICATIONS

PRESENTATION

Ce cahier d'Interactions Didactiques réunit deux articles qui pourraient par ailleurs être lus et discutés séparément. Si nous avons voulu les présenter de façon conjointe c'est parce que:

- d'une part ils traitent d'un "même" objet (les formulations écrites d'opérations additives élémentaires) et parce que
- d'autre part ces travaux trouvent leur origine et leur mûrissement dans un contexte d'"interactions didactiques" entre les auteurs et leurs équipes respectives.

Si nous insistons aujourd'hui sur cet aspect de collaboration scientifique ce n'est pas seulement pour rappeler que des interactions entre chercheurs d'horizons différents sont parfois possibles, voire fructueuses,mais surtout pour souligner le fait que le résultat de ces échanges découlent eux-mêmes d'une confrontation de points de vue, de regards scientifiques différents sur un "même" objet (d'abord provisoirement idéntifié et ensuite construit de plus en plus précisément au fur et à mesure de l'avancement des travaux)*.

HISTOIRE D'UNE CONVERGENCE DE PROBLEMATIQUES

Depuis 1976, dans une perspective de psychologie sociale de l'éducation et dans le sillage des travaux de psychologie sociale génétique sur la construction sociale de l'intelligence (Perret-Clermont 1979), A.N. Perret-Clermont et M.L. Schubauer-Leoni commencent à s'intéresser aux apprentissages scolaires et à leurs contenus. L'interaction sociale et la communication entre élèves, sont alors mises "à l'épreuve" dans le contexte des savoirs mathématiques enseignés à l'école primaire. Une première recherche est ainsi conçue et elle paraît dans la revue Recherches en Didactique des Mathématiques (Schubauer-Leoni et Perret-Clermont 1980). Dès lors, la problématique soulevée croise deux objets d'étude qui sont en fait deux faces d'une même réalité.
La distinction que nous opérons n'a qu'un but heuristique et peut se formuler ainsi:

a) comment l'enfant s'approprie** un savoir mathématique élémentaire (une écriture arithmétique genre 5+3-2=...)
b) quel est l'impact de situations d'interaction et de communication entre enfants dans l'élaboration de ce savoir.

---

* *Pour l'étudier et le définir nous avons été obligés de donner à l'objet un statut de réalité extérieure à nous-mêmes, et de tracer ainsi un univers sémantique qui le délimite provisoirement. Ce n'est qu'une fois l'étude accomplie qu'il est possible de revenir sur l'objet pour analyser "ce qu'il est devenu" au cours des différents travaux, au gré des différentes "mises en pièces" subies.*

** *Nous utilisons pour l'instant ce terme au sens large où l'appropriation présuppose que l'enfant sache faire preuve de ce savoir dans des contextes fort divers que nous seront amenés à spécifier.*

Par ailleurs sur un autre terrain J. Brun et F. Conne développent une réflexion psychopédagogique relative à la spécificité des contenus mathématiques, par rapport notamment aux notions de la psychologie du développement cognitif (1978). Ils ouvrent un espace d'analyse proprement didactique en référence, d'une part aux travaux de G. Vergnaud (1977) relatifs à l'étude des procédures et des représentations, d'autre part à ceux de G. Brousseau (1977) sur les "situations didactiques" comme situations impliquant un jeu de dialectiques dites de l'"action", de la "formulation" et de la "validation".

Grâce à la convergence des problématiques, à l'existence d'un "lieu" scientifique (la didactique des mathématiques) propre aux travaux sur l'enseignement des mathématiques* , grâce aussi au financement du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique (contrat no 1.706. 0.78) et à l'apport de nouvelles collaborations scientifiques (E.H. Saada à Genève et M. Grossen à Neuchâtel), de nouveaux travaux communs ont été entrepris.

Nous avons souligné ailleurs (Schubauer-Leoni et Perret-Clermont 1984 a et b) la dimension épistémologique que comporte l'étude de l'appropriation d'un savoir mathématique dans un contexte relationnel donné. En effet, une telle étude n'est pas réductible à l'appropriation d'autres savoirs et elle nécessite une approche particulière de l'objet même sur lequel elle porte, ainsi que des cadres théoriques ad hoc.
Nous avons abordé une telle étude par l'intermédiaire de la problématique de la formulation d'opérations additives, ce qui nous a révélé une réalité bien plus complexe que prévue. Nous avons été amenés à opérer des détours constants, à relire et recoder, voire à classifier les productions enfantines de façon diverse et de plus en plus différenciée.

C'est pourquoi, dans un premier temps nous avons provisoirement laissé dans l'ombre le déroulement et le contenu des interactions entre enfants pour vérifier les effets positifs de l'interaction entre élèves sur la conduite subséquente de l'enfant en face à face avec l'adulte.
Nous avons alors constaté que si les situations expérimentales où l'élève est confronté à un autre enfant lors d'un codage d'une opération additive semblent effectivement permettre des évolutions vers des écritures de plus en plus explicites rendant de mieux en mieux compte des opérations en jeu, les élèves ne semblent pas pour autant recourir "spontanément" à l'écriture arithmétique apprise à l'école.

Les différentes productions obtenues dans des contextes relationnels divers (enfant face à un adulte ou à un camarade, élève en classe parmi d'autres élèves, etc.) -puisqu'elles ne se sont pas avérées d'emblée "canoniques" - ont nécessité une prise en compte particulière des formulations à la fois pour mieux saisir ce qui les différencie de l'écriture

---

* *"Lieu" de débat qui se veut - par décision des chercheurs qui l'animent- autre et donc non réductible à la psychologie génétique ou sociale voire aux mathématiques et qui exige alors la constitution de savoirs spécifiques.*

en signes arithmétiques et pour en comprendre l'éventuelle spécificité.

Un travail important a alors consisté à chercher une catégorisation des procédures de symbolisation mises en oeuvre dans les productions écrites (Brun 1981, Brun et Schubauer-leoni 1981 et 1982).
Ce deuxième volet d'études, tout en continuant à tenir compte des différentes situations d'interaction entre partenaires, a surtout mis l'accent sur l'objet mathématique lui-même et les transformations qu'il subit au niveau de la formulation écrite.

C'est en quelque sorte grâce à une meilleure compréhension des procédures de symbolisation activées dans les contextes étudiés qu'il a été possible de "revenir" à la prise en compte et à l'étude des interactions elles-mêmes, ce qu'elles permettent et les significations différentes qu'elles véhiculent selon les partenaires en présence (enfants entre eux ou adulte et enfant en interaction par exemple) et selon les stratégies de formulation qui y sont mises en oeuvre.

En d'autres termes, nous n'avons jamais imaginé de "simplifier" les situations à étudier sans l'espoir de mieux les cerner, mais nous avons chaque fois créé des contextes matériels, relationnels et conceptuels que nous cherchions à définir, et mis tour à tour l'accent sur un pôle particulier à analyser. Notre but n'était pas celui de mettre "à plat" notre objet d'étude global pour en faire une sorte de suite de connaissances scientifiques qui s'ajouteraient les unes aux autres. Toute nouvelle compréhension d'une face de la problématique a amené une restructuration, un remodelage de notre appréhension de l'ensemble à étudier.
Ainsi c'est entre autres parce que nous sommes parvenus à établir une typologie qui nous paraît satisfaisante et complète des écritures produites par les élèves que nous pouvons désormais poser clairement le problème des relations en jeu entre acteurs de la scène expérimentale et scolaire et tenter de saisir comment et à quelles conditions se produisent des significations partagées et s'élaborent des formulations arithmétiques univoques. Les "rôles" de chaque partenaire de la mise en scène expérimentale se sont précisés au fur et à mesure, ce qui nous a permis de repenser plus fondamentalement cette mise en scène et d'assigner spécifiquement à chaque acteur un rôle à tenir.
C'est dans cette perspective que nous proposons de lire les deux textes ici réunis:

Le premier décrit le fonctionnement de contextes expérimentaux "classiques", où il n'est pas explicitement question d'opérations arithmétiques, où le flou quant au codage par l'enfant de "ce qui est attendu" par l'expérimentateur est important. C'est le paradigme traditionnel qui est en jeu avec un expérimentateur prétendument "absent".
L'analyse que nous présentons, elle, par contre vise à redonner du poids aux variables habituellement "négligées" par une lecture conventionnelle; le problème de la nature même de la tâche proposée (que nous avons caractérisé comme une forme de problème "ouvert") est posé.

Le deuxième texte constitue l'étape suivante dans la mesure où, implicitement elle intègre les connaissances acquises dans les travaux précédents

et restructure aussi bien la situation d'interaction que la tâche elle-même.
Les rôles de chacun sont ici repensés (y compris la fonction de l'expérimentateur-animateur-observateur). On pourrait dire que c'est une "fermeture" voulue et organisée de la tâche dans laquelle les élèves doivent jouer un rôle qui leur a été précisé et qui a été pensé préalablement de façon à leur donner la responsabilité d'utiliser une écriture compatible à leurs yeux avec les opérations effectuées sur les objets.

Notre objet d'étude s' éclaire sur une face nouvelle qui nous semble particulièrement informante pour en comprendre sa nature.

M.L. S.L.
mars 1984

FORMULATIONS ECRITES DE PROBLEMES ADDITIFS ET INTERACTIONS SOCIALES

Etablissement d'une typologie d'écriture et analyse de "contenu" des formulations

Maria-Luisa Schubauer-Leoni
Michèle Grossen

Genève et Neuchâtel, mars 1984

TABLE DES MATIERES

I. INTRODUCTION 1

II. LES CONTEXTES EXPERIMENTAUX 5

1. Situation-problème et contexte relationnel 10

III. TYPOLOGIE DES FORMULATIONS ECRITES 11

IV. ANALYSE DES PRODUCTIONS ECRITES 18

1. Les types de formulation décrits sous III 18
   A. Les productions du temps 1 18
   B. Quelques commentaires à propos des types de formulation du temps 1 26
   C. Contenus des différent s types de formulation des représentations écrites 29

2. Changements intervenus dans les types de formulation entre le temps 1 et le temps 3 selon les conditions expérimentales 39

3. Le temps 2 55

V. CONCLUSIONS 62

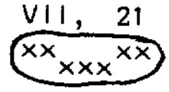
1. Des enfants, des adultes, des mathématiques, des réalités 63

2. La recherche présentée 65

3. Encore un mot à propos de la notion de "représentation" 69

INTRODUCTION

Dès le début de l'école primaire, la **notion de nombre** est centrale dans l'enseignement des mathématiques. Les psychologues lui ont consacré de nombreux travaux[1)] montrant que cette notion est loin d'être élémentaire. Vergnaud (1981) rappelle "(...) qu'elle s'appuie sur d'autres notions, celles d'application, de correspondance biunivoque, de relation d'équivalence, de relation d'ordre. Elle est indissociable, chez le jeune enfant, de la notion de mesure. Enfin c'est la possibilité de faire des additions qui donne à la notion de nombre son caractère spécifique par rapport aux notions sur lesquelles elle s'appuie."[2)]

Mais il est important de souligner que le nombre ne doit pas être confondu avec sa **représentation écrite.** Des écritures diverses peuvent représenter un même nombre. Le nombre "sept" peut être représenté par 7, VII, 21 en base trois, "sept" en langage naturel, , ou  et par d'autres schématisations graphiques.

Sastre et Moreno (1977), cherchant à explorer les déphasages qui, lors d'un apprentissage scolaire, existent entre le niveau apparent des connaissances et le niveau "réel"[3)] de compréhension de l'enfant, étudient la représentation graphique de la quantité pour des collections comprenant moins de 10 éléments[4)]. Comme l'enfant est amené très tôt à compter des petites quantités et

1) Depuis les premiers travaux de Piaget et Szeminska (1941), les recherches se sont multipliées et diversifiées. Il est par ailleurs intéressant de noter, parmi les travaux récents, la place qui est faite au comptage et à son rôle dans la construction du nombre et de l'addition (Meljac 1979, Perret-Clermont 1979, Comiti et al. 1980, Droz et Paschoud 1981, Fischer 1981).

2) L'importance de la découverte de l'addition dans l'acquisiton de la notion du nombre repose, selon cet auteur, sur ce qu'il appelle la notion d'homomorphisme, notion qui fait appel à une sorte de principe de cohérence, voire "d'équivalence des procédures opératoires".

3) Le niveau de réalité que le psychologue atteint et qu'il a tendance à caractériser comme étant le "vrai" niveau de compréhension de l'enfant.

4) La consigne donnée est la suivante : "Fais ce qui te semble le mieux, ce que tu juges le plus approprié pour qu'en regardant ce que tu as fait sur le papier, on puisse savoir combien de bonbons j'ai mis sur la table". (Sastre et Moreno, 1977)

même à les représenter graphiquement, Sastre et Moreno se demandent si cette capacité suppose réellement une compréhension du symbolisme numérique et si par conséquent, elle peut être utilisée dans un contexte pratique. Leur étude sur des sujets âgés de 6 à 10 ans, parvient à la description de différents types de représentation graphique allant du dessin sans rapport apparent avec la quantité d'éléments donnés, à l'utilisation des symboles numériques et montre que ces différents types de représentation suivent un développement psychogénétique. La constatation que peu de jeunes enfants utilisent spontanément la numération graphique apprise à l'école amène Sastre et Moreno à remettre en question certaines pratiques pédagogiques qui ne tiennent pas assez compte du développement cognitif de l'enfant.

Dans une nouvelle série de recherches, Sastre et Moreno (1980) différencient la représentation graphique de la quantité de celle des opérations arithmétiques. Il nous semble effectivement important de différencier ces deux types de tâche qui présupposent des opérations de pensée spécifiques.

Vergnaud (1977, 1981), quant à lui, étudie la représentation graphique de la quantité, non pour mesurer la différence entre l'utilisation spontanée qu'en fait l'enfant et celle que lui enseigne le maître, mais plutôt pour rappeler que la fonction de toute représentation est de replacer un concept (un signifié) sur le plan du signifiant. Puisque seul ce dernier est directement observable, il devient particulièrement intéressant d'étudier comment s'effectue le passage du plan du concept à celui des différents niveaux de la représentation. Ceci devrait, selon Vergnaud, permettre de parvenir à une compréhension du niveau opératoire de l'enfant qui tienne compte des différents niveaux d'élaboration représentationnelle qu'il construit à partir du plan conceptuel.

Dans cette perspective, si l'écriture du nombre est à distinguer du concept du nombre, le **plan des représentations écrites** des nombres est un élément indispensable à étudier pour comprendre l'acquisition de l'addition et donc du nombre lui-même.

Etudier les signifiants nécessite pourtant que l'on sache sur quelles opérations de pensée elles s'appuyent. Pour représenter des opérations d'addition et de soustraction, le sujet doit pouvoir signifier à la fois les quantités, la "résultante" de leur composition (que nous appelerons "bilan") et les relations en jeu dans l'opération. Nous ne poserons pourtant pas le problème en terme de "passage au symbolisme" car cela serait comme si, une fois la notion d'addition construite, il suffisait à l'enfant de "coucher" sur le papier l'opération effectuée mentalement et comme si le terme de "représentation" désignait à la fois **l'opération mentale** et la **production écrite** qui est demandée à l'enfant à l'école et dans certains contextes expérimentaux.

En clair, l'enfant qui sait dire que 3 billes et 2 billes font 5 billes, n'utilise pas **nécessairement** l'écriture "3 + 2 = 5" pour signifier l'identification des deux nombres ("3 + 2" et "5") et n'effectue pas forcément un calcul du genre : "A 3 j'ajoute 2 et ça fait 5"[1].

Bien que dès la première primaire (6 ans), les programmes de mathématiques de Suisse romande prévoient que les élèves apprennent à compléter des égalités lacunaires du type "3 + ... = 5" et que cette activité soit généralement bien réussie à cet âge[2] nous avons pu vérifier dans différentes recherches (Schubauer-Leoni et Perret-Clermont 1980, 1983, Brun et Schubauer-Leoni 1981) que l'enfant ne recourt pas "spontanément" au système d'écriture arithmétique dans une situation où il est appelé à formuler par écrit une opération manipulée matériellement qu'il doit réorganiser sur le plan conceptuel.

1) Interprétation de cette dernière dite "naïve" par Freudenthal par opposition à "l'interprétation acceptée en mathématique" selon laquelle "2 + 7 ne constitue pas un problème mais un nombre et, d'une façon générale, a + b est un nombre dès lors que a + b sont des nombres" (Encyclopaedia Universalis, "Notation Mathématique").
2) Les travaux de F. Conne (à paraître) et ceux (en cours) de Schubauer-Leoni, tendent à montrer que la composition des relations en jeu dans une écriture arithmétiuqe dépendent de nombreux facteurs. Ainsi par exemple, l'enfant ne tient pas toujours compte, dans une égalité de la position des chiffres et des signes; le nombre final (le plus à droite dans une écriture en ligne) est souvent perçu comme l'aboutissement d'un calcul (c'est le "résultat"), indépendamment des signes d'opération.

Ces deux types de compétence (recours à l'écriture arithmétique dans une situation où il serait pertinent d'y faire appel et la capacité de résoudre des égalités lacunaires de type 3 + 5 = ... ou 3 + ... = 8) semblent se développer d'une façon relativement indépendante : Si l'une n'est pas une condition nécessaire de l'autre (Schubauer-Leoni et Perret-Clermont 1980), nous avons même pu constater que l'exercice spécifique d'activités de codage peut produire, à court terme, des pseudo-régressions au niveau de l'actualisation de l'autre compétence (Schubauer-Leoni et Perret-Clermont 1984).

Il est bien clair que, par notre étude, nous ne pouvons atteindre que certaines **manifestations** de connaissances. C'est pourquoi, lorsque nous parlons **d'actualisation** des connaissances, nous ne la concevons pas comme une extériorisation **directe** d'un savoir complètement préconstruit. C'est en quelque sorte dans **le hic et nunc** du questionnement et des réponses que des fragments de connaissances se structurent et prennent un sens par le modelage du processus d'actualisation lui-même. Nous postulons par là que toute connaissance prend forme chez l'individu parce qu'elle est forgée dans et par la construction de l'intersubjectivité entre interlocuteurs du moment (Perret-Clermont et al, 1982).

Nous avons également vérifié (Schubauer-Leoni et Perret-Clermont 1980) qu'il ne suffit pas à l'enfant de parvenir à la notion de composition additive du nombre (stade 3 où l'enfant comprend et justifie l'identité d'un tout au travers des différentes compositions additives de ses parties : (4 + 4) = (1 + 7) = (2 + 6) ...) pour qu'il fasse nécessairement appel à l'écriture arithmétique pour les signifier.

Comme le recours à l'écriture équationnelle n'est pas systématique, il nous a paru intéressant de chercher à savoir d'une part comment des élèves de deuxième primaire (7-8 ans)[1]

1) Le choix d'une population de 2ème primaire se fonde sur le fait que les élèves de ce degré scolaire ont tous déjà un certain "bagage scolaire" relatif aux écritures canoniques des mathématiques. Notre but n'est donc évidemment pas de les leur faire "réinventer" !

formulent une opération du type a + b -c = X et d'autre part sur quel contenu ils se centrent lorsqu'ils codent des opérations autrement qu'en langage mathématique conventionnel.

Nos interrogations portent sur les points suivants : Quels sont les différents types de représentation écrite auquels l'enfant va recourir ? Quels sont les éléments de la situation sur lesquels l'enfant va se centrer et qu'il va mentionner dans sa production ? Ou, autrement dit quels sont les contenus des différents types de formulation ? Comment les différents types de formulation utilisés par l'enfant se modifieront-ils après une phase d'interaction entre enfants ? L'enfant changera-t-il de type de formulation ? Ajoutera-t-il ou au contraire enlèvera-t-il des informations ? Quelles informations retiendra-t-il finalement comme pertinentes ? Oberverons-nous des différences dans le choix des types de formulation en fonction des conditions expérimentales que nous avons construites ?

II. LES CONTEXTES EXPERIMENTAUX

L'expérimentation a été menée auprès de 65 élèves de deuxième année primaire (7-8 ans) d'un village près de Neuchâtel (Suisse). La passation s'est déroulée en fin d'année scolaire, soit en juin 1980 et elle comporte 3 phases :

1) Phase individuelle **(temps 1)**
2) Phase d'interaction entre enfants **(temps 2)**
3) Seconde phase individuelle **(temps 3)**

Le matériel à disposition était le suivant :

Temps 1 et temps 3 :

- un **panier** rond avec un **couvercle** dans lequel se trouvent **des billes vertes**
- un **sac** en tissu
- papier, crayon

Temps 2 :

- des **fleurs jaunes** en plastique
- papier, crayon

Technique et consignes de passation des temps 1 et 3

L'expérimentatrice reçoit l'enfant dans un local réservé à cet effet et lui montre les billes contenues dans le panier. Elle prend alors 4 billes et les met dans le couvercle du panier. Sans verbaliser ses actions, elle prend ensuite ces billes et les met dans le sac. Puis elle reprend 5 billes et fait de même. Finalement, quand toutes les billes sont dans le sac, elle ressort 2 billes du sac et les met dans le couvercle du panier.

L'opération mathématique en jeu peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$4 + 5 - 2 = 7$$

ou

$$4 + 5 = 9 \quad 9 - 2 = 7$$

Au temps 3, la passation est la même mais les quantités en jeu sont changées de la façon suivante :

$$3 + 6 - 2 = 7$$

ou

$$3 + 6 = 9 \quad 9 - 2 = 7$$

La consigne est la suivante :

"Je te donne une feuille et un crayon et sur cette feuille tu vas expliquer tout ce que j'ai fait avec les billes et aussi combien de billes il y a à la fin dans le sac. Tu expliques ça pour qu'un autre enfant qui n'a pas vu ce que j'ai fait puisse comprendre et refaire la même chose."

Technique et consignes de passation du temps 2

Différentes conditions expérimentales sont formées lors du temps 2 :

- CE1 et CE2 se différencient uniquement par la **consigne**.

- CE3 passe par une situation individuelle de même type que celle du temps 1.

Pour CE1 et CE2, la technique est la suivante : L'expérimentatrice va chercher 2 enfants dans leur classe (deux classes différentes[1]) et laisse celui qui sera le "**décodeur**" attendre dans le corridor en lui disant qu'il devra deviner quel "jeu"[2] son camarade et l'expérimentatrice vont faire. L'expérimentatrice présente alors les fleurs au "**codeur**" (l'autre enfant) et lui donne la consigne suivante :

> **"On va dire que tu vas à l'école et que tu veux faire un bouquet pour ta maîtresse. Alors tu prends ça** (l'expérimentatrice prend 2 fleurs qu'elle met dans une main de l'enfant)...**et tu prends encore ça** (l'expérimentatrice prend 6 fleurs et les met dans l'autre main de l'enfant)...**tu décides de faire un seul bouquet** (l'E fait regrouper les fleurs dans une seule main)..., **tu les mets ensemble. Ensuite tu rencontres un copain qui veut aussi donner des fleurs à sa maîtresse** (l'E retire 3 fleurs du bouquet et les pose sur la table). **Voilà c'est fini ...ce bouquet tu le donnes à ta maîtresse** (l'E prend rapidement le bouquet et le place hors de la vue de l'enfant pour qu'il n'ait pas le temps de compter le nombre de fleurs dans le bouquet)."

Comme au temps 1, l'enfant reçoit une feuille de papier et un crayon.

La consigne donnée au groupe expérimental CE1 est alors la suivante :

> **"Je te donne une feuille de papier et un crayon et sur cette feuille tu vas expliquer tout ce qui s'est passé avec les fleurs et aussi combien il y a de fleurs à la fin dans le**

1) Nous avons choisi de faire interagir des élèves venant de deux classes scolaires différentes pour éviter que les enfants construisent (et de façon incontrôlable par nous) leur message en fonction de l'image qu'ils ont de leur partenaire (le "bon" ou le "mauvais" élève de la classe de mathématique par exemple).

2) La notion de "jeu" renvoie aux représentations (largement induite par l'expérimentateur) que l'enfant a de la tâche. Pour une discussion sur l'ambiguité créée par ce terme, cf Chastaing 1959.

bouquet pour la maîtresse. Tu expliques ça pour que X (le décodeur) **qui est derrière la porte et qui n'a pas vu ce qu'on a fait avec les fleurs puisse comprendre et refaire la même chose. Tu expliques bien tout ce qu'on a fait avec les fleurs et combien il y en a à la fin dans le bouquet pour la maîtresse."**

La consigne donnée au groupe expérimental CE2 est identique au début de cette consigne mais se termine ainsi : **"(...) pour que X** (le décodeur) **qui est derrière la porte et qui n'a pas vu ce qu'on a fait avec les fleurs puisse comprendre ce qu'on a fait (...)".**

La consigne du groupe expérimental CE3 est du même type que celle du temps 1 et se termine ainsi : **"...pour qu'un autre enfant qui n'a pas vu ce qu'on a fait avec les fleurs puisse comprendre et refaire la même chose (...)".**

L'opération en jeu est donc la suivante :

$$2 + 6 - 3 = 5$$

ou

$$2 + 6 = 8 \quad 8 - 3 = 5$$

Ainsi dans la condition CE1, le décodeur a pour tâche d'essayer de reconstituer le jeu d'après la compréhension qu'il en a grâce à la production du codeur (et ceci sous les yeux du codeur, bien entendu) alors que dans la condition CE2, il explique oralement sa compréhension du jeu au codeur.

Dans la condition CE3 par contre, l'existence d'un décodeur est simplement évoquée afin que le codeur comprenne que son message doit être explicite pour quelqu'un d'étranger à la tâche.

Les différentes conditions expérimentales font donc intervenir 3 types **d'interactions sociales** que nous rappelons brièvement :

1) Dans la **condition 1** (CE1), la tâche du "décodeur" est d'expliquer sa compréhension de la situation en s'aidant de la production de son camarade puis de reconstituer le jeu devant

lui. Le codeur **verra** donc si **son camarade** est capable ou non de comprendre le jeu en se **basant** sur sa production.

2) Dans la **condition 2** (CE2), le **décodeur** se contente d'expliquer sa compréhension de la production **de** son camarade mais ne reconstitue rien. Dans ce cas le codeur ne bénéficie donc pas d'un feed-back "par l'action".

3) Les sujets de la **condition 3** (CE3), quant à eux, ne bénéficient pas d'une interaction directe avec un décodeur puisque celui-ci est seulement évoqué par l'expérimentatrice. La présence de cette dernière va peut-être, dans le cas de CE3 être ressentie d'une façon particulièrement forte : S'agissant du seul interlocuteur de l'élève, ne va-t-elle pas être investie de la fonction implicite de "décodeur" ? L'enfant ne va-t-il pas tenter de faire avouer à l'adulte sa compréhension ou son incompréhension du message ?

4) Nous avons également prévu une **condition 4** (CE4) dans laquelle les élèves ne subissent aucune intervention de notre part au temps 2.

Concernant les conditions 1 et 2, nous postulons une supériorité des effets **de** CE1 sur ceux de CE2. En effet, nous pensons que le codeur devrait être confronté à un conflit cognitif et social beaucoup plus fort lorsqu'il assiste à la capacité (ou à l'incapacité) du décodeur de **refaire** sa propre manipulation que lorsqu'il entend le décodeur lui **dire** ce qu'il a compris.

Pourtant, compte tenu des résultats des recherches précédentes sur les formulations portant sur des problèmes du même genre, nous ne nous attendions pas à ce que les élèves produisent massivement des écritures arithmétiques, même à la suite de la condition expérimentale 1 avec feedback par l'action. L'ensemble des recherches menées sur ce sujet tendent à montrer que le recours à l'écriture arithmétique reste très peu fréquent même après deux séances d'interaction de 15 à 20 minutes chacune. Nous postulons en revanche que les élèves de CE1 **modifient** leurs formulations écrites : La situation de décodage par un paire devrait jouer un rôle de "déstabilisateur" momentané d'une première production et susciter, lors du codage individuel subséquent une écriture symbolique plus "évoluée"[1)] que celle produite au temps 1.

Les conditions 3 et 4 dans lesquelles les enfants n'ont aucune autre référence "socialement incarnée" que l'attitude (décodée comme approbatrice ou non) de l'expérimentatrice ne se différencient fondamentalement, à première vue, que par le nombre de passations (trois pour CE3 - temps 1, temps 2, temps 3 - et deux pour CE4 - temps 1 et temps 3 seulement -) et donc par le type de matériel et de tâche manipulée[2)]. Nous nous attendons donc à une légère supériorité de CE3 sur CE4.

1. Situation-problème et contexte relationnel

Comme dans nos précédentes recherches, les opérations de pensée nécessaires pour répondre au problème consistent à enchaîner une addition et une soustraction pour trouver le bilan final des quantités, soit $a + b - c = X$. L'enfant est donc sensé organiser des signes qui représentent les quantités ainsi que les

1) Evolution dans le sens d'une composition plus complète et plus exhaustive des données du problème et d'une production pouvant être décodée d'une façon plus univoque. Nous reviendrons plus explicitement sur cet aspect lors de la présentation de nos critères d'analyse.

2) Il est bien vrai que les sujets de CE3 ont manipulé (lors du temps 2) un matériel différent (fleurs) que celui du temps 1 et ont répondu à une règle du jeu faisant intervenir de nombreux éléments (fleurs, enfants, maîtresse, copain, se donner des fleurs les uns les autres, en garder pour la maîtresse, etc...); mais nous ne pensons pas que la confrontation à une nouvelle "face objectuelle" (Perret 1983) constitue **en soi** un élément moteur de nouvelles formulations plus exhaustives dans la composition des données. En revanche, la diversification du matériel a peut-être un impact sur les **registres** utilisés par l'élève pour signifier les opérations. La notion de "registre", telle que nous l'utilisons ici sera précisée ultérieurement.

opérations sur ces quantités. La fonction de l'écriture a + b - c = X peut être celle de garder en mémoire un calcul (ou les relations qu'il représente) mais elle peut aussi représenter des consignes d'opérations à effectuer pour celui qui la lit.

Ainsi nos conditions expérimentales dans lesquelles l'enfant produit un message à l'intention d'un autre enfant qui va le décoder nous paraissent-elles tout à fait compatibles avec les fonctions de l'écriture arithmétique. En retour, le comportement du décodeur joue une fonction de **validation** (ou d'invalidation) de la formulation. Selon Brousseau (1976), c'est par l'articulation d'un système de dialectiques que l'élève va évoluer : "Le franchissement d'un obstacle implique très souvent à la fois une restructuration des modèles d'action, du langage et du système de preuves." Nos conditions expérimentales 1 et 2 se proposent tout particulièrement de favoriser le jeu dialectique de ces modèles, bien que nous laissions relativement peu de temps aux élèves (environ 10 minutes de travail et de confrontation entre élèves) pour que le processus porte ses fruits. Dans notre contexte expérimental, l'enfant peut ainsi recourir à l'écriture arithmétique en réponse à la forme d'entretien que l'expérimentatrice lui propose et qu'il identifie comme ayant les même exigences implicites qu'une leçon de mathématiques. Dans ce cas, l'enfant ferait plutôt référence à l'interlocuteur adulte qui assume alors en premier chef la fonction de validation du message.

III. TYPOLOGIE DES FORMULATIONS ECRITES

Lors de précédentes recherches (Brun et Schubauer-Leoni 1981; Schubauer-Leoni et Perret-Clermont 1984 a et b), nous avons déjà mis en évidence l'utilisation par les élèves de **trois registres** différents pour désigner les **opérations** impliquées dans "a + b - c = X" :

- **langage naturel** (L.N.)
- **schèmas ou autres indices perceptifs** (S/IP)
- **écriture arithmétique** (E.A.)

A partir des productions écrites, il a aussi été possible d'inférer les opérations que l'enfant a effectuées mentalement. Les trois catégories suivantes ont été retenues (Brun et Schubauer-Leoni 1981) :

- **Absence de composition entre les nombres** mais description partielle ou totale des données du problème (**A**).
- **Composition partielle avec bilan partiel** : a + b = X1 (**B**) ou b - c = X1 (**C**).
- **Composition complète avec bilan final** : a + b + c = X2 (composition non pertinente : **D**) ou a + b - c = X2 (composition pertinente : **E**).

Dans la présente recherche, nous proposons une analyse qui **articule les types de composition des données et les registres utilisés pour les signifier** et ceci **selon les contextes expérimentaux** qui en déterminent les conditions d'émergence.

Pour étudier les systèmes de représentation écrite, nous proposons de distinguer les signes utilisés par l'enfant pour désigner d'une part les **opérations** et d'autre part les **quantités**. Le tableau suivant décrit la **typologie théorique** des systèmes de représentation pour a + b - c = X2 :

TABLEAU 1 : MISE EN CORRESPONDANCE DES REGISTRES DE FORMULATION RELATIFS AUX QUANTITES ET AUX OPERATIONS SUR CES QUANTITES

OPERATIONS

QUANTITES	LANGAGE NATUREL (LN)	SCHEMAS ET AUTRES INDICES PERCEPTIFS (S/IP)	SIGNES ARITHMETIQUES (SA)
LANGAGE NATUREL (LN)	type IL	IIL	IIIL
DESSIN (D)	ID	IID	IIID
CHIFFRE (C)	IC	IIC	IIIC
AUCUNE QUANTITE	I	II	III

La diagonale du tableau (type I, II et III) indique les formulations à registre homogène, c'est-à-dire les productions qui signifient les opérations et les quantités dans une même type de registre (L.N ou S/IP + D ou S.A + C).

Voici des **exemples de chaque type de formulation** (opération en jeu : 4 + 5 - 2 = 7) :

Types de formulation homogènes :

Type IL :

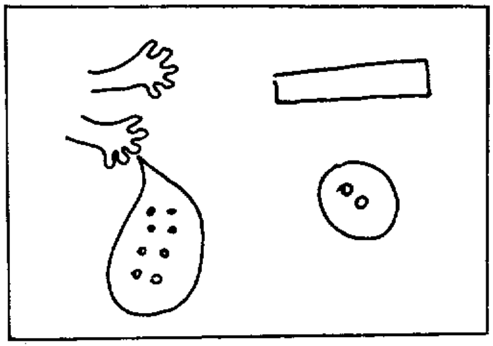
DAN (TEMPS 1)

En a mis des lis dans un rond
et après en les a mie dans un sac
et en a sortie deux lis et il en reste
sept

Les opérations sont signifiées en langage naturel et différenciées entre elles par la distinction "mettre" et "sortir"; les quantités sont également mentionnées en langage naturel : celles qu'on enlève et le bilan final.

Type IID :

STAP (TEMPS 1)



Ici les quantités sont dessinées, leur statut est signifié par la position occupée dans l'espace des objets : Les deux billes (sous-entendu "enlevées") sont dessinées dans le couvercle rond tandis que dans le sac sont dessinées les billes "bilan". Les mains désignent "l'action". Cet exemple montre bien la tentative de l'enfant de faire appel à toute sorte d'indices perceptifs pour représenter les opérations mais nous sommes bien obligées d'admettre (et le décodeur confirmera notre impression) que ce type de message permet de multiples interprétations lors du décodage par un interlocuteur absent au moment de la manipulation.

Type IIIC :

PASE (TEMPS 1)

$4+5=9 \qquad 9-2=7$

Les opérations sont signifiées par l'écriture arithmétique (+, -, =) et les quantités par des nombres.

Types de formulation mixtes

Type IC :

CHO (TEMPS 1)

Vous avez mis 5 bille dans un couverqule et après vous avez mis 4 bille dans le couverqule et après vous avez mis 2 bille dans le couverqule. Dans il nous reste dans le sac 10 billes

CHO raconte l'histoire en langage naturel. Il dit ainsi qu'il est question de **mettre** x billes dans tel récipient. Or l'acte est tout à fait identifiable mais en revanche les opérations d'ajouter et d'enlever ne sont pas différenciées (on continue de "mettre" des billes dans le couvercle). Les quantités sont systématiquement chiffrées.

Dans ce même type de formulation IC, il est donc possible de trouver des notations comme celles de CHO, ainsi que des notations qui différencient correctement les quantités ajoutées et enlevées.

DANI (TEMPS 3)

Vous avez mi des bille dans un sac et vous avez enlever 2 bille et puis il en reste 7

Type IIC :

GIU (TEMPS 1)

4 5 2	7

Les quantités sont chiffrées et les opérations sont partiellement signifiées par la position du bilan 7 nettement distancé des données du problème. La quantité qu'on ajoute et celle qu'on enlève ne sont en revanche pas distinguées. Pourtant 7 n'a manifestement pas le même statut que 4, 5 et 2.

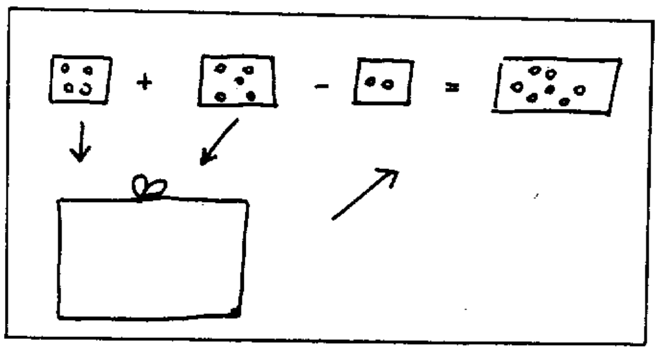
Dans d'autres notations de ce type, la différenciation est encore moins nette. A part l'ordre de présentation des chiffres (d'abord 4 et 5, ensuite la quantité enlevée et enfin le bilan), il n'y a apparemment aucune différence entre quantités. Ainsi PASC ne prend aucune autre mesure que celle de signifier qu'il s'agit bien de trois quantités différentes et non pas du nombre 927.

PASC (TEMPS 3)

9 , 2 , 7

Type IIID :

ALI (TEMPS 3)



Signes arithmétiques pour signifier les opérations et dessins pour signifier les quantités.

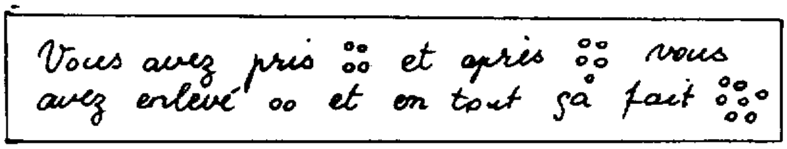
Type I :

DANI (TEMPS 1)

Vous avez pris des bille et vous les avez mi dans un cornet

L'enfant ne signifie aucune quantité et ne fait que "raconter" un bout de l'histoire.

Type ID :



Cet exemple est fictif car aucun élève n'a répondu ainsi. Les quantités sont dessinées et les opérations sont en langage naturel. Les exemples suivants sont également **fictifs** :

Type IIL :

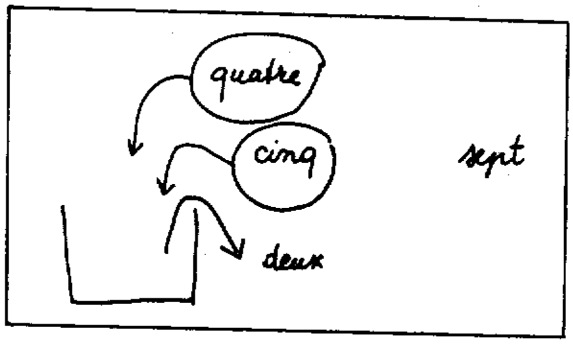
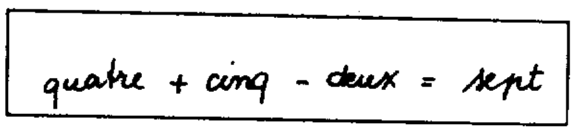


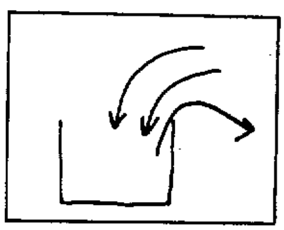
Schéma fléché pour les opérations et langage naturel pour les quantités.

Type IIIL :



Signes arithmétiques pour les opérations et langage naturel pour les quantités.

Type II :



Schémas indiquant des gestes d'opération mais aucune quantité.

Type III :

Signes arithmétiques d'opérations mais aucune quantité.

En donnant ces exemples, nous avons chaque fois que possible recouru à des productions rencontrées au cours de l'expérience. Les derniers exemples inventés pour la clarté du modèle ont le mérite de montrer que les enfants ne recourent pas à n'importe quelle composition de registres : Si d'une part ils trouvent tout à fait naturel d'utiliser conjointement le langage naturel et les symboles chiffrés (IC) ou les signes arithmétiques +, -, = et le dessin (IIID), en revanche des productions de type IIL ou IIIL ne leur semblent pas judicieuses. De même lorsqu'il ne considère pas nécessaire de formuler les quantités en jeu, l'enfant se limite-t-il à rappeler un bout de consigne en langage naturel (I) mais aucun enfant ne schématise que les opérations (II) ou ne fait que rapporter les signes arithmétiques (III).

IV. ANALYSE DES PRODUCTIONS ECRITES

1. Les types de formulation présentés sous III

A. Les productions du temps 1

Nous prendrons maintenant en compte les différentes formulations produites au temps 1 de l'expérience. Pour ce faire, nous allons distinguer les productions d'après les opérations effectuées à savoir : Absence de composition des données (**A**); composition partielle (**B** ou **C**) et composition totale (**D** ou **E**) (cf p. 12).

Pour chacune des trois catégories **A**, **B/C**, **D/E**, nous analyserons alors les registres employés par les élèves pour signifier ces opérations.

TABLEAU 2 : CATEGORIE A : Absence de composition des données. Devant représenter l'opération a+b-c=x les élèves se limitent à décrire partiellement ou exhaustivement les données du problème (a,b et c)

N= 14

OPERATIONS

QUANTITES	LANGAGE NATUREL (LN)	SCHEMAS ET INDICES PERCEPTIFS (S/IP)	SIGNES ARITHMETIQUES (SA)
LANGAGE NATUREL (LN)	a b c* ISAB LN LN LN IL	IIL	IIIL
DESSIN (D)	ID	a b c SAMM D D D PATR D D D CHRO D - D NIR D D D SAND D D D IID	IIID
CHIFFRE (C)	a b c CHRI - - C LAB - - C CAR C C C YAN C C LN ISA C C LN IC	a b c JOE C C C IIC	IIIC
AUCUNE QUANTITE	DAN CARO I	II	III

* Pour chaque élève nous avons noté les quantités qu'il a représenté (a, b et c) et le registre de formulation utilisé (LN ou D ou N)

D'après ce tableau, nous constatons que lorsque les enfants ne composent pas les données du problème, ils peuvent "raconter l'histoire", soit par le langage naturel, soit par des schémas dessinés. Les quantités sont surtout dessinées (IID) ou chiffrées : Dans ce cas, les opérations sur ces quantités sont (à une exception près pour JOE) représentées par le langage naturel (Ia).

Les productions de YAN et de ISA sont à relever à cause du double registre utilisé pour signifier les quantités : a et b sont chiffrés tandis que c est noté en langage naturel. Y a-t-il là une tentative d'attribuer à ces quantités (a et b d'une part et c d'autre part) un statut qui les différencie ?

Voici quelques **exemples** de productions :

Pour les formulations de type IID, voici l'exemple de SABR qui signifie ainsi les données a, b et c :

SABR (TEMPS 1)

Les autres productions classées sous IID sont sensiblement du même genre.

Les notations de type IC sont plus diversifiées. Voici l'exemple de CHRI qui ne mentionne que la quantité enlevée c :

CHRI (TEMPS1)

secoué on panie 2 bie on panie des bie

La notation de LAU, bien que plus explicite dans sa phrase est du même genre que celle de CHRI.

CAR, YAN et ISA mentionnent les trois données du problème dans un énoncé du genre :

CAR (TEMPS 1)

4 bille et elle les sa secouée et elle en a repri 5 pi elle les sa secouée et elle a soti 2

TABLEAU 3 : CATEGORIES B et C : Composition partielle des données; a et b sont additionnés (ou c est soustrait de a ou b) et le bilan x_1 est représenté. Le bilan x_2 n'apparaît jamais dans ce type de notation.

N - 9

QUANTITES	OPERATIONS: LANGAGE NATUREL (LN)	SCHEMAS ET INDICES PERCEPTIFS (S/IP)	SIGNES ARITHMETIQUES (SA)
LANGAGE NATUREL (LN)	IL	IIL	IIIL
DESSIN (D)	ID	a b c x_1 NAR D D - D ALIN - - D D NARI - D - D NOE D D D D* IID	IIID
CHIFFRE (C)	a b c x_1 SAB C - C C BEA - - C C CYR - - - C IC	a b c x_1 DAV D D - C IIC	a b c x_1 STE - - C C IIIC

* x_1 est le bilan de b-c

Au temps 1, les enfants qui composent partiellement les données du problème et représentent un bilan intermédiaire X1, font appel surtout à deux types de registres : Un premier registre homogène où les opérations **et** les quantités sont signifiées par des schémas dessinés (II). Dans ce cas, nous constatons que, chez ces sujets, **toutes** les quantités mentionnées (X1 y compris) sont dessinées. Le deuxième registre croise les opérations en langage naturel avec des quantités chiffrées (IC). A noter que parmi les élèves ayant produit des formulations de ce type, le fait de signifier par écrit la quantité X1 ne comporte pas nécessairement la représentation des données a, b et c (sauf pour NOE où X1 est le résultat de b - c !). L'enfant qui compose partiellement les données du problème ne représente pas nécessairement un nombre plus grand de quantités qu'un élève qui se limite à décrire les trois données du problème.

La production de DAV mérite un commentaire particulier : Cet enfant commence en effet par noter les quantités a et b en les dessinant mais il représente le bilan X1 par un chiffre en soulignant par là la différence de statut importante, le saut qualitatif qui existe entre les données du problème et leur composition additive X1.

Cet aspect de la formulation nous semble particulièrement important et nous le reprendrons en considération dans le tableau suivant pour discuter des productions des élèves qui composent complètement les données du problème.

Mais voici d'abord quelques **exemples** de notations des catégories **B** et **C** :

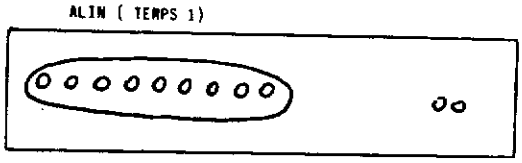
La notation de SAB est caractéristique des productions de type IC :

SAB (TEMPS 1)

vous ave mi 4 bi apre 9 a apre 2

Parmi les production de type IID, voici celle d'ALIN :

ALIN (TEMPS 1)



X1 est entouré et est ainsi distingué de la quantité c (00).

T A B L E A U 4 : CATEGORIES D et E : Composition complète des données avec bilan final x_2. Les données a, b et c n'apparaissent pas nécessairement.[1)]

N = 42

O P E R A T I O N S

QUANTITES	LANGAGE NATUREL (LN)	SCHEMAS ET INDICES PERCEPTIFS (S/IP)	SIGNES ARITHMETIQUES (SA)
LANGAGE NATUREL (LN)	a b c x_1 x_2 DAN – – LN – LN IL	IIL	IIIL
DESSIN (D)	a b c x_1 x_2 NIC D D D – D/LN ID	a b c x_1 x_2 SANO – – – – D STAP – – D – D SAN – D – – D IDE D D – – D FRED D D D – D IID	a b c x_1 x_2 ALI D D D – D IIID
CHIFFRE (C)	a b c x_1 x_2 LOR – – – – C SUE – – – – C PAT – – – – C STP – – – – C PY – – C – C YVA – – C – C PAN – – LN – C STEP – – C C C KAR C C – – C PAS – – C C C JER C C – – C ISB LN C – – C JOS C C C – C ELO C C C – C ANTO C C C – C SYLV C C C – C CMO C C C – C* LAUR C C C C C IC	a b c x_1 x_2 PHIL – – D – C CEL – D – – C CHRIS – – C – C MARC – – C – C PASA D – – – C LUC – – C C C PAS – – C C C LIN D D – – C MAU C – C – C GIU C C C – C POTR C C C – C SONI C C C – C IIC	a b c x_1 x_2 SYL D D D – C ISE C C C – C** TOM C C C C C*** PASEC C C C C C * IIIC

* opération sous-jacente: $a+b+c=x_2$

** " " : $a+b+c-c=x_2$

*** opération ainsi formulée: $a+b=x_1$, $c=x_2$

1) A la suite de chaque nom d'élève (désigné par quelques lettres comme par exemple DAN) sont notées dans le tableau les quantités présentes dans la production et le registre employé pour les signifer (L.N., D., N.).

Les élèves qui composent complètement les données du problème représentent les **opérations** à l'aide des trois registres (LN, S/IP, SA). Une fois encore[1], nous vérifions que le fait de composer complètement les données ne comporte pas automatiquement le recours aux signes arithmétiques pour signifier les opérations en jeu. De plus, quand l'élève recourt au code conventionnel, il ne le fait pas nécessairement de façon correcte et pertinente (cf ISE et TON). D'autre part, le recours aux signes +, -, = n'implique pas non plus nécessairement le recours à la notation chiffrée pour représenter les quantités : ALI (IIID) (cf p. 16) est un bel exemple d'utilisation conjointe des quantités dessinées et de signes arithmétiques.

La plupart des élèves qui composent toutes les données sont cependant classés sous le type de formulation IC. Leur production au temps 1 met en relation le langage naturel pour la désignation des opérations et les nombres pour la désignation des quantités. Leur "message" a ainsi l'allure d'un "texte" écrit en "français", dans lequel apparaissent les quantités chiffrées.

En voici quelques **exemples** :

PAT (TEMPS 1)

> Elle a pris un sac elle a mi des
> bille dedant il en reste 7

PAT (ainsi que LOR, SUE, STP) ne représentent que le bilan final X2.

PY et PAM représentent, en plus du bilan final la quantité enlevée (c) :

PY (TEMPS 1)

> On n a mie de bille dans un sac
> en n en na mi 2 bille dans un
> couvere et il en reste 7

1) Ces résultats confirment ceux que nous avions déjà obtenus dans des recherches précédentes (Schubauer-Leoni et Perret-Clermont 1980 et 1984, Brun et Schubauer-Leoni 1981).

STEP, PAS et LUC tiennent compte en plus du bilan intermédiaire X1, tandis que KAR, JER et ISAB signifient les données a, b et le bilan X2.

STEP (TEMPS 1)

On na sorti des billes on na mit
dan un petit carner on na mit
9 billes on sorti 2 bille il reste
7 bille

JER (TEMPS 1)

Dans le sace elle en à mit 4 aprait
5 et menent il en reste 7 dans le
sac

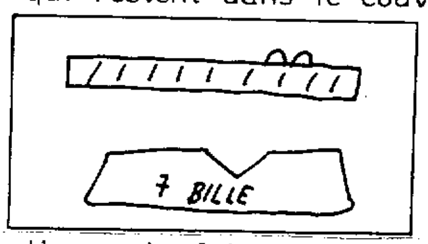
JOS, ELO, ANTO, SYL, CHO écrivent un petit texte du même type que les précédents mais ils notent aussi la quantité enlevée (c).

Un autre type de représentation produit par un nombre important d'élèves qui composent toutes les données est celui appelé IIC dans lequel les opérations sont schématisées par des flèches, des "zones" entourées etc tandis que le statut des quantités en jeu est uniquement représenté par des espacements entre quantités, voire même par un certain ordre de disposition des chiffres ou par des dessins qui signifient les quantités. Contrairement à certaines quantités qui, dans ce type de formulation, apparaissent occasionnellement en dessin, le bilan final X2 est, quant à lui, toujours chiffré.

Nous proposons ici quelques **exemples** de formulations de type IIC :

PHIL ne représente que le bilan X2 dans le sac et les deux billes qui restent dans le couvercle du panier :

PHIL (TEMPS 1)



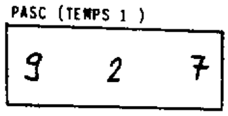
A souligner le fait que les deux billes (quantité c) sont dessinées, tandis que le bilan final X2 est chiffré ! Les productions de CEL et de PASA sont du même genre.

CHRIS et MARC ne signifient que deux quantités chiffrées, X1 et c :

CHRIS (TEMPS 1)

PASC et LUC sont les seuls classés sous IIC à représenter le bilan intermédiaire X1 (en plus de c et X2) :

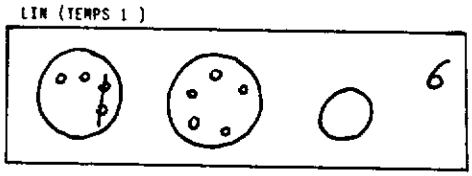
PASC (TEMPS 1)



Pourtant comme nous l'avons déjà fait remarquer, PASC ne différencie pas le statut des trois quantités.

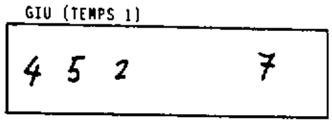
.LIN dessine les données du problème (a et b); elle barre deux billes de a et compose en notant le bilan final X2 (erreur de calcul) :

LIN (TEMPS 1)



GIU, POTR et SONI notent ainsi :

GIU (TEMPS 1)



Le statut du bilan final attribué au chiffre 7 est mis en évidence par un espacement plus important.

B. Quelques commentaires à propos des formulations du temps 1

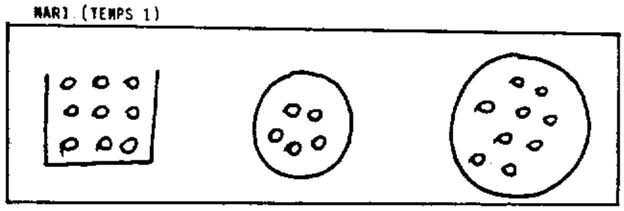
La prise en considération de l'ensemble des formulations du temps 1 à la lumière des analyses des différentes types de formulation groupés dans les tableaux 2, 3 et 4 nous permet de relever les points suivants :

1. Compte tenu de la tâche, de la consigne et du contexte de passation en-dehors de la classe scolaire, le registre "Signes arithmétiques" est le moins "choisi" par les élèves. Lorsque ceux-ci y recourent (6 élèves sur 66), on constate que les signes +, -, = sont accompagnés de quantités chiffrées (sauf ALI). Nous disons bien "accompagnés" parce que la syntaxe propre au langage arithmétique n'est pas nécessairement respectée (cf TON). Nous n'avons d'ailleurs aucun élément pertinent pour affirmer que le statut d'écritures du type a + b - c = X est, pour l'enfant qui la produit, fondamentalement différent d'une notation de type IC. Pourtant, il faut souligner le fait suivant : L'écriture arithmétique n'apparaît au temps 1 que lorsqu'il y a composition (même partielle) des données du problème.
2. Le registre en langage naturel est souvent utilisé pour noter un message destiné à un autre enfant. Que ce soit pour la représentation des données de base (tableau 2), d'une composition partielle (tableau 3) ou de la composition totale (tableau 4), 31 enfants sur 66 recourent au langage naturel pour désigner les opérations. Les quantités sont le plus souvent chiffrées (26 enfants sur 31). Un seul élève construit un code en langage naturel tout en dessinant les quantités (cf NIC : tableau 4). Nous avons pourtant souligné que le langage naturel ne différencie pas nécessairement les opérations d'addition et de soustraction.
3. Les formulations faisant appel à des schémas, dessins et indices perceptifs divers nous paraissent intéressantes pour plusieurs raisons. Prenons le cas des formulations de type II axées exclusivement sur le dessin. Les formulations sont la

fois très "concrètes" et détaillées (l'enfant dessine par exemple le panier qui contient les billes, le couvercle ou le sac) et difficiles à décoder. Nous faisons l'hypothèse que c'est parce que souvent, l'enfant commence par s'aider d'un schéma pour pouvoir répondre lui-même à la question et le propose ensuite tel quel au décodeur. Véritables "instruments de travail", certaines productions ne laissent alors plus apparaître au lecteur le déroulement de l'action et les points de repère permettant une lecture chronologique du déroulement de l'action n'apparaissent plus.

Prenons un **exemple** : MARI pour signifier l'opération $4 + 5 - 2 = 7$ note :

MARI (TEMPS 1)



Nous pouvons inférer de cette formulation que l'enfant a opéré une composition partielle ($4 + 5 = 9$); elle représente au milieu de la feuille 5 billes et, de part et d'autre une collection de 9 billes. Il est vraisemblable que l'enfant ait construit un des ensembles de 9 éléments en dessinant 5 ronds et ensuite 4 pour les dénombrer et trouver 9. Elle retranscrit ce bilan dans une nouvelle notation de 9 objets. Autre hypothèse : Le premier ensemble "carré" de 9 billes constitue et représente pour l'enfant un ensemble de départ avec n billes (le hasard faisant qu'elle en dessine 9). Bref, nous esquissons des hypothèses pour montrer, à propos de la formulation de MARI, les problèmes d'interprétation inhérents au registre "schémas et autres indices perceptifs".

Les formulations de type IID que nous venons de décrire sont proposées pour rendre compte de la description des données de base (catégorie A) mais aussi pour signifier les compositions partielles ou complètes des quantités.

4. Un autre élément intéressant à relever pour les productions de ce registre selon le type de composition signifié, est constitué par la sous-catégorie IIC. En effet, s'ils ne composent pas les données (catégorie **A**) ou s'ils les composent partiellement (catégorie **B/C**), les élèves ne recourent pratiquement pas à ce type de formulation (tableaux 2 et 3). Organiser des chiffres dans l'espace sous forme de schémas ou d'indices perceptifs ne semble en effet prendre de sens que pour les élèves qui composent complètement les données (catégorie **D/E**; tableau 4). Il s'agit le plus souvent dans ces formulations d'alignements de chiffres, les opérations effectuées n'étant pas explicites et l'ensemble de la notation qui en résulte restant difficilement décodable selon les termes du problème.
5. Concernant les quantités représentées, il nous semble intéressant de relever que parmi les élèves qui composent complètement les données (tableau 4), 16 élèves sur 42 se contentent le plus souvent de noter le bilan X2 et une autre quantité, comme si l'aboutissement à un "résultat" se suffisait à lui-même.
6. Concernant le type de signifiant employé, nous remarquons qu'au temps 1, les quantités-bilan (X1 et X2) représentées sous forme de chiffre deviennent importantes lors de compositions complètes (types IC, IIC et IIIC du tableau 4).

   Les 9 élèves qui composent partiellement les quantités (tableau 3) fournissent soit des bilans dessinés (4 sujets), soit des bilans chiffrés (5 sujets) alors que sur les 41 élèves qui composent complètement les quantités, 33 (80 %) recourent au chiffre pour signifier le bilan.

C. <u>Contenu des différentes typologies des représentations écrites</u>

L'analyse typologique des productions des enfants au temps 1 nous a déjà amenées à décrire et articuler deux dimensions relatives au contenu des différentes notations : la formulation des **quantités** et les **opérations** sur ces quantités. Nous avons ainsi mis en évidence l'usage de trois registres pour signifier ces contenus : le langage naturel, les schémas et dessins divers (signes arithmétiques et chiffres). Nous allons maintenant reconsidérer ces trois registres pour regarder "ce que l'enfant signifie" dans sa notation, à part les quantités et les opérations sur ces quantités.

En fait, l'enfant représente des **actions-opérations** (exemple : "j'enlève", "je prends des billes", etc) mais il note parfois aussi d'autres **actions "annexes"** (exemple : elle a secoué le cornet"), c'est-à-dire des actions réellement exécutées lors de la manipulation mais qui ne sont pas nécessaires à la résolution mathématique du problème (savoir "combien il y a de billes à la fin dans le sac"). Elles permettent en revanche "d'expliquer tout ce que j'ai fait avec les billes", donc de tenir compte de la première partie de la consigne (p. 6).

Ce type d'analyse nous amène aussi à prendre en considération des éventuels phénomènes de **"redondance d'information"** : L'enfant juxtapose-t-il des formulations différentes pour dire la même chose ? Allons-nous, par exemple, trouver une même quantité à la fois chiffrée et dessinée ?

Si tel est le cas, dans quels registres cela se produit-il ? L'enfant va-t-il représenter les **différents objets** manipulés ou faisant partie de la mise en scène expérimentale (exemple : sac, couvercle etc) ? Parle-t-il du **lieu** de l'action et du **sujet de l'action ?**

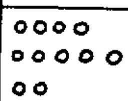
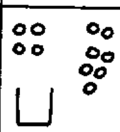
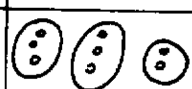
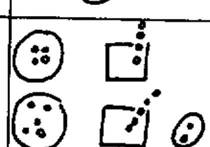
Nous allons reprendre ces questions en différenciant les types de formulation déjà décrits au paragraphe A en fonction du type de composition effectué par les élèves sur les données du problème.

T A B L E A U 5 : CONTENU DES FORMULATIONS DE LA CATEGORIE A

FORMULATIONS EN LANGAGE NATUREL

NOM	SUJET DE L'ACTION	OBJETS MANIPULES ET QUANTITES	ACTIONS-OPERATIONS	ACTIONS "ANNEXES"	INFORMATIONS REDONDANTES
ISAB	elle	quatre bille/cinq bille/deux(bille) sac	mi sortie	-	-
CHRI	on	2 bie panié	-	secoué	-
LAU	elle	des bie panié sac / 2 bi	mi, mi resorti	-	-
CAR	elle	4 billes,5,2	repri soti	secouée secoué	-
YAN	elle	4 billes/ panier sac / 5 bille/ deux billes	mit pris	-	-
ISA	Michel elle	4 bille/5 bille sac / deux	mis /pris resortie	-	-
DANI	vous	des bille cornet	pris/ mi	-	-
CARO	elle	des bille petit plateau sac	mi	-	-

FORMULATIONS A L'AIDE DE SCHEMAS ET INDICES PERCEPTIFS

NOM	SUJET DE L'ACTION	OBJETS MANIPULES ET QUANTITES	ACTIONS-OPERATIONS	ACTIONS "ANNEXES"	INFORMATIONS REDONDANTES
SABR	-		disposition spatiale	-	-
PATR	-		disposition spatiale	-	-
CHRO	-		disposition spatiale	-	-
MIR	-		disposition spatiale	-	-
SAND	-		disposition spatiale	-	-
JOE	-	4 5 2	disposition spatiale	-	-

D'emblée, nous constatons que le registre "langage naturel" qui, de par sa nature même, se présente sous forme de proposition grammaticale, est plus riche en détails. Les phrases ont toujours un sujet : "Elle" (l'expérimentatrice) domine. Le choix du sujet montre déjà que l'enfant-codeur construit son message pour un tiers. Seul un sujet (DANI) s'adresse directement à l'expérimentatrice en posant le sujet de sa phrase en terme de "vous".

Les schémas ne représentent ici que les billes et éventuellement le sac (forme carrée) et le couvercle (forme ronde).

Nous allons maintenant décrire le contenu des formulations des catégories **B** et **C** où les élèves composent partiellement les données.

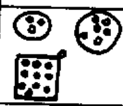
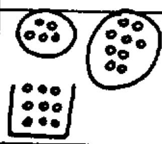
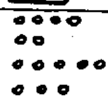
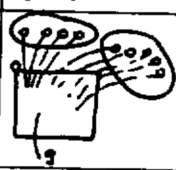
TABLEAU 6 : CONTENU DES FORMULATIONS DES CATEGORIES B ET C

FORMULATIONS EN LANGAGE NATUREL

NOM	SUJET DE L'ACTION	OBJETS MANIPULES ET QUANTITES	ACTIONS-OPERATIONS	ACTIONS "ANNEXES"	INFORMATIONS REDONDANTES
SAB	vous	4 bi/ 9 / 2	mi	-	-
BEA	elle	des bie/ petite boîte /petit sac 9 bie / 2 bie	mi /sorti	-	-
CYR	vous	les billes/ 9 billes couvercle	il y a	rouler	-

T A B L E A U 6 (suite)

FORMULATIONS A L'AIDE DE SCHEMAS ET INDICES PERCEPTIFS

NOM	SUJET DE L'ACTION	OBJETS MANIPULES ET QUANTITES	ACTIONS-OPERATIONS	ACTIONS "ANNEXES"	INFORMATIONS REDONDANTES
MAR	-		disposition spatiale	-	-
ALIN	-		disposition spatiale	-	-
MARI	-		disposition spatiale	-	deux fois 9 billes (?)
NOE	-		disposition spatiale	-	-
DAV	-		disposition spatiale	-	-

FORMULATION EN ECRITURE ARITHMETIQUE

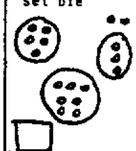
NOM	SUJET DE L'ACTION	OBJETS MANIPULES ET QUANTITES	ACTIONS-OPERATIONS	ACTIONS "ANNEXES"	INFORMATIONS REDONDANTES
STE	-		"_"	-	-

A part les quantités représentant le bilan partiel X1, ces formulations ne se différencient pas particulièrement de celles effectuées dans les mêmes registres par les élèves qui ne composent pas les quantités (A).

Nous prendrons maintenant en considération les formulations des élèves qui composent toutes les données du problème.

TABLEAU 7 : CONTENU DES FORMULATIONS DES CATEGORIES D et E

FORMULATIONS EN LANGAGE NATUREL

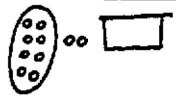
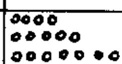
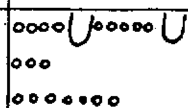
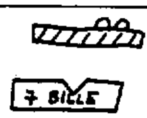
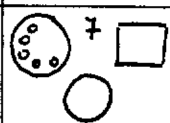
NOM	SUJET DE L'ACTION	OBJETS MANIPULES ET QUANTITES	ACTIONS-OPERATIONS	ACTIONS "ANNEXES"	INFORMATIONS REDONDANTES
DAN	on	des bis/ un rond sac / deux bis sept	mis / sortie il en reste	-	-
NIC	-	set bie 		-	"set " et 
LOR	vous	les bille couvercle/ sace 7	mi	-	-
SUE	vous	les bille / sac 7	mi	-	-
PAT	elle	sac / des bille 7	pris / mi en reste	-	-
STP	-	8/ ronde	il en reste	-	-
PY	on	de bille / sac 2 bille / couverc 7	mie il en reste	-	-
PAM	elle	7 bille / sac deux	rajouter	-	-
YVA	il elle	6 / dans le sac une / 2 deore	il en a enlever il en reste	-	-
STEP	on	des billes petit corner 9 billes / 2 bille 7 bille	sorti mit il reste	-	-

T A B L E A U 7 (suite)

KAR	-	4 5 7	dabore après il en reste	-	-
PAS	vous	9 bis / 2 bis 8	mi / enlever il en reste	-	-
JER	elle	sace 4 5 7	mit/ aprait il en reste	-	-
ISB	il	quatre bille 5 bille /7	après il en reste	-	-
JOS	il	4 bil / 5 bil sac / 2 / 7	aprè / a mi aprer / enver il en reste	-	-
ELO	je	4 bille / cornet 5 2 6	mis / ajouter enlever il en reste	-	-
ANTO	vous	4 bil / sac / 4 bi 6 bil	mi / de nouveau il enreste	-	-
SYLV	-	2 bie / 5 bie 2 5 / baccai	enlever / entou	-	-
CHO	vous	5 bille / couvercle 4 bille / 2 bille 10 bille / sac	mis / il nous reste	-	-
LAUR	vous	4 bille / 5 bille 9 bille / 2 / 7	après / sorti il en reste	-	-

T A B L E A U 7 (suite)

FORMULATIONS A L'AIDE DE SCHEMAS ET INDICES PERCEPTIFS

NOM	SUJET DE L'ACTION	OBJETS MANIPULES ET QUANTITES	ACTIONS-OPERATIONS	ACTIONS "ANNNEXES"	INFORMATIONS REDONDANTES
SANO	-		-	-	-
STAP	-			-	-
SAN	-		disposition spatiale	-	-
IDE	-		disp. spat.	-	-
FRED	-		disp. spat.	-	-
PHIL	-		disp. spat.	-	-
CEL	-		disp. spat.	-	-
CHRIS	-	7 . 2	-	-	-
MARC	-	7 2	-	-	-
PASA	-		disp. spat.	-	-
PAS	-	9 2 7	-	-	-
LIN	-		disp. spat.	-	-
MAU	-	4 7 2	-	-	-
GIU	-	4 5 2 7	disp. spat.	-	-
POTR	-	6 4 2 4	disp. spat.	-	-
SONI	-	4 5 2 7	-	-	-
LUC	-	8 | 2 | 6	barres de séparation	-	-

T A B L E A U 7 (suite)

FORMULATIONS EN ECRITURE ARITHMETIQUE

NOM	SUJET DE L'ACTION	OBJETS MANIPULES ET QUANTITES	ACTIONS-OPERATIONS	ACTIONS "ANNNEXES"	INFORMATIONS REDONDANTES
ALI	-		+ / - / =	-	"+" et "-" et
SYL	-	 7	+ / - / =	-	-
ISE	-	4 5 2 2 11 9	+/ - / =	-	deux fois "4" / deux fois "5" et 4 fois "2"
TON	-	 4 5 9 2 7	+ / - / =	-	●●●○ et "4" ●●○○○ et "5" ○○ et "2"
PASE	-	4 5 9 9 2 7	+ / - / =	-	-

Les contenus explicites présentés dans le tableau 7 nous montrent, à l'intérieur de chaque registre, des formulations sensiblement semblables à celles des tableaux 5 et 6.

Sur l'ensemble des productions du temps 1, nous constatons alors que :

- Parmi les 30 enfants qui utilisent le langage naturel, seuls 4 enfants (des catégories **D** et **E**) ne mentionnent pas le sujet de l'action. Les 26 autres le nomment au moins une fois par les termes "elle", "vous", "on", voire par le prénom de l'expérimentatrice. Dans les autres formulations (schémas et écriture arithmétique), le sujet de l'action n'est jamais rapporté.
- Les opérations signifiées en langage naturel rendent compte surtout des procédures de calcul correspondant à des gestes effectués : "J'ai mi", "on a sorti", "il en reste". Cette dernière expression apparaît presque régulièrement lors de la composition complète des données.
- La consigne et le type de tâche, la manipulation très faiblement verbalisée et axée justement sur les actes accomplis produisent des formulations relativement dépouillées d'éléments "annexes". A part deux élèves qui rappellent le fait que l'expérimentatrice a "secoué" le sac, nous n'avons pas relevé d'autres informations de ce genre.
- Ici également peu d'informations redondantes.
- Le langage naturel surtout et le dessin ensuite permettent à l'enfant de mentionner "le sac" ($\sqcup$), le "couvercle" ($\bigcirc$) et évidemment le fait qu'il s'agit de billes ($\circ\circ\circ$).
- La différence de contenu entre représentations peut donc essentiellement tenir à une différence de registre d'une part et à une différence entre les quantités signifiées (a, b et c exclusivement, X1 et/ou X2) d'autre part.
- Enfin, nous sommes amenées à nous demander si les raisons qui ont motivé le choix de tel ou tel type de formulation ne

sont pas en relation avec les éléments de la situation que l'enfant a jugés le plus importants à signifier. Il se peut, par exemple, que l'enfant qui se centre sur des caractéristiques de la situation comme le sujet de l'action et l'action, choisisse un type de formulation en langage naturel. Mais inversement, il se peut que le choix d'un type de formulation pousse l'enfant à se centrer sur certaines caractéristiques de la situation et à en négliger d'autres. Cette dernière perspective est plus prosaïque : Le fait que l'enfant "choisisse" le premier type de formulation qui lui vient à l'esprit[1)] et qu'une fois engagé dans une formulation il en exploite les possibilités, nous paraît mieux correspondre à nos impressions subjectives d'expérimentatrices, lorsque nous observons l'enfant noter son message et lorsqu'il pose en début de notation des questions comme : "j'écris ?", "il faut dessiner ?", questions auxquelles l'expérimentatrice répond laconiquement par un "tu fais comme tu penses que ça va le mieux..." !

2. Changements intervenus dans les formulations entre le temps 1 et le temps 3 selon les conditions expérimentales

Nous rappelons brièvement[2)] les 4 conditions expérimentales en décrivant les passations du temps 2.

CE1 et CE2

Manipulation : Un enfant codeur constitue un bouquet de fleurs pour sa maîtresse en mettant ensemble 2 fleurs et 6 fleurs. Il imagine ensuite qu'il donne 3 fleurs à un copain.

1) Ce "choix" repose certainement sur des indices socio-cognitifs propres à la situation de questionnement mais nous sommes forcées d'admettre que nous les connaissons encore fort mal.

2) Pour plus de détails, voir le chapitre II : Les contextes expérimentaux p. 4

Codage : CE1 : noter ce qui s'est passé avec les fleurs pour qu'un autre enfant (décodeur) puisse **comprendre et refaire la même chose.**

CE2 : noter pour qu'un autre enfant puisse **comprendre** ce qui a été fait.

CE3 : Même manipulation mais le codage ne fait intervenir qu'un décodeur potentiel.

CE4 : Aucune intervention de notre part au temps 2.

Au temps 3, les enfants-codeurs de ces 4 conditions expérimentales sont re-testés à l'aide d'une passation du même genre qu'au temps 1 : Seules les quantités en jeu sont légèrement modifiées et donnent lieu à l'opération suivante :

$$3 + 6 - 2 = 7$$

Afin d'analyser les changements intervenus entre le temps 1 et le temps 3, nous proposons de regarder ce que deviennent les différents types de formulation (décrits à la pages 12 et suivantes) pour les sujets de chaque condition expérimentale.

TABLEAU 8 : CONDITION EXPERIMENTALE 1 : CHANGEMENTS INTERVENUS ENTRE LE TEMPS 1 ET LE TEMPS 3 DANS LES TYPES DE FORMULATION SELON LA COMPOSITION DES DONNEES (A , B ou C , D ou E)

N = 9

		TEMPS 1 A			B/C	D/E		
		IID	IIC	IC	IID	IID	IL	IC
TEMPS 3 A	IID					IDE		
	IIC							
	IC			LAU				
B/C	IID				MARI	SANO		
D/E	IID		JOE			SAN		
	IL							PAT
	IC			DANI		FRED		

TABLEAU 9 : QUANTITES REPRESENTEES AU TEMPS 1 ET AU TEMPS 3 PAR LES SUJETS DE LA CONDITION EXPERIMENTALE I

	TEMPS 1	TEMPS 3
LAU	c	$\underline{a}$ $\underline{b}$ c
JOE	a b c	a b c $\underline{x_1}$ $\underline{x_2}$
DANI	-	$\underline{c}$ $\underline{x_2}$
MARI	$\underset{\bullet}{b}$ x_1	x_1
IDE	a b $\underset{\bullet}{x_2}$	a b $\underline{c}$
SANO	$\underset{\bullet}{x_2}$	$\underline{x_1}$
SAN	$\underset{\bullet}{b}$ x_2	$\underline{c}$ x_2
PAT	x_2	$\underline{c}$ $\underline{x_1}$ x_2
FRED	a b c x_2	a b c x_2

$\underline{\quad}$ au temps 3 sont ainsi soulignées les quantités qui n'apparaissaient pas au temps 1

• au temps 1 nous avons ainsi désigné les quantités qui ont été abandonnées lors du codage du temps 3

Les tableaux 8 et 9 montrent que :

- LAU, MARI et SAN produisent un même type de formulation et effectuent le même type de composition au temps 1 et au temps 3. Ces trois sujets ne proposent pourtant pas une formulation absolument identique aux deux temps de l'expérience. En effet, ils modifient les quantités signifiées en ajoutant ou en supprimant certaines quantités (tableau 9).
- IDE, SANO et DANI conservent le même type de formulation mais IDE passe de la composition totale des quantités à la non-composition; SANO de la composition totale à la composition partielle. Ces deux sujets régressent donc entre le temps 1 et le temps 3 pour ce qui est de la composition des quantités. Ainsi IDE et SANO, s'ils ne modifient pas le nombre de quantités signifiées (respectivement 3 et 1, cf tableau 9), changent une quantité au temps 3 (c à la place de X2 pour IDE; X1 à la place de X2 pour SANO). DANI, à type de formulation identique passe de la non-composition des quantités à la composition totale en signifiant deux quantités (c et X2).
- JOE, FRED et PAT sont seuls à changer à la fois de type

de formulation et de type de composition des données. JOE compose toutes les données mais, ce faisant, ne note plus les quantités par des chiffres et préfère les dessiner en signifiant ainsi les quantités a et b en plus de la quantité c représentée au temps 1. FRED compose toutes les données comme au temps 1 mais modifie la formulation : Au lieu de dessiner les quantités et de schématiser les opérations, il emprunte la langage naturel et les chiffres pour représenter le calcul (les quantités signifiées sont les mêmes). PAT ne note plus les chiffres mais les écrit en langage naturel, tout en continuant de composer correctement les quantités du problème. Mais si au temps 1, PAT ne signifiait que la quantité X2, au temps 3, il complète sa notation par les quantités c et X1.

Nous soulignons encore qu'au temps 3, 5 élèves sur 9 utilisent exclusivement le dessin (type IID) pour représenter le problème.

TABLEAU 10 : CONDITION EXPERIMENTALE 2 : CHANGEMENTS INTERVENUS ENTRE LE TEMPS 1 ET LE TEMPS 3 DANS LES TYPES DE FORMULATION SELON LA COMPOSITION DES DONNEES (A , B ou C , D ou E)

N= 11

TEMPS 3 \ TEMPS 1		A		B/C			D/E					
		I	IID	IID	IC	IIIC	IID	IL	ID	IIC	IC	IIIC
A	I											
	IID								NIC			
B/C	IID		NIR									
	IC	CARO			CYR							
	IIIC											
D/E	IID			NOE			STAP					
	IL											
	ID											
	IIC							DAN		CEL		
	IC										SUE YVA	
	IIIC					STE*						

* Bilan final de type D ($a+b+c=x_2$)

<u>TABLEAU</u> 11 : QUANTITES REPRESENTEES AU TEMPS 1 ET AU TEMPS 3 PAR LES SUJETS DE LA CONDITION EXPERIMENTALE 2

	TEMPS 1	TEMPS 3
CARO	-	a c x_1
MIR	a b c	a b c x_1
NOE	a b c x_1	a b c x_2
CYR	x_1	x_1
STE	c x_1	c x_1 x_2 (type D)
STAP	c x_2	c x_2
DAN	c x_2	a b c x_1 x_2
NIC	a b c x_2	a b c
CEL	b x_2	c x_2
SUE	x_2	c x_2
YVA	c x_2	a b c x_2

cf légende tableau 9

Les tableaux 10 et 11 montrent que :

- CYR, STAP, CEL, SUE et YVA ne changent ni de type de formulation, ni de type de composition des données entre le temps 1 et le temps 3. La lecture du tableau 11 nous montre en outre que : - CYR et STAP rapportent les mêmes quantités au temps 1 qu'au temps 3; - SUE ajoute la quantité c au temps 3; - CEL subsititue à la quantité b la quantité c et YVA ajoute les données a et b au temps 3.
- MIR, NOE, STE conservent le même type de formulation mais amènent des modifications quant au type de composition des données : - MIR passe de la non-composition des données à leur composition partielle, il ajoute donc la quantité X1; - NOE et STE passent de la composition partielle à la composition complète des données. Ce faisant, NOE substitue le bilan X2 au bilan X1, tandis que STE ajoute la quantité X2 au temps 3.
- CARO et NIC modifient à la fois le type de formulation et le type de composition des données : CARO qui ne composait pas les quantités au temps 1 et se contentait de

reformuler un bout de la consigne sans mentionner aucune quantité, compose partiellement les données au temps 3 en actualisant les quantités a et c et le bilan X1. NIC, quant à lui, effectue la composition totale des quantités au temps 1 en rapportant les données a, b, c et X2. Mais au temps 3, il ne compose plus les données et ne rapporte donc que les quantités a, b et c. Ce faisant, il passe d'une formulation en langage naturel et dessin (ID) à une formulation dessinée (IID).

- DAN modifie le type de formulation entre temps 1 et temps 3 et rapporte davantage de quantités au temps 3 tout en conservant le même type de composition des données (composition totale). Il passe ainsi d'une formulation en langage naturel (IL) à une formulation avec dessins et chiffres (IIC). Au temps 3, il rapporte les quantités de façon plus exhaustive.

D'une façon générale, nous constatons que l'apport du "dessin" reste important : 6 enfants sur 11 y recourent, ne serait-ce que pour dessiner quelques "ronds-billes".

A part STE, les autres enfants optent pour le langage naturel et les quantités chiffrées (IC).

TABLEAU 12 : CONDITION EXPERIMENTALE 3 : CHANGEMENTS INTERVENUS ENTRE LE TEMPS 1 ET LE TEMPS 3 DANS LES TYPES DE FORMULATION SELON LA COMPOSITION DES DONNEES (A , B ou C , D ou E)

N= 10

TEMPS 3 \ TEMPS 1		A	B/C		D/E			
		IID	IID	IC	IID	IL	IIC	IC
A	IID	SABR						
B/C	IID						MAU	
	IC							
D/E	IID	CHRO	ALIN					
	IL							PAN
	IIC						PASA	
	IC			BEA			CHRIS	PY LOR

TABLEAU 13: QUANTITES REPRESENTEES AU TEMPS 1 ET AU TEMPS 3 PAR LES SUJETS DE LA CONDITION EXPERIMENTALE 3

	TEMPS 1	TEMPS 3
SABR	a b c	a b c
CHRO	a b c	a b c $\underline{x_2}$
BEA	c x_{m1}	$\underline{a\ b}$ c $\underline{x_2}$
ALIN	c x_1	c, x_1 $\underline{x_2}$
PAM	c x_2	$\underline{a\ b}$ c x_2
PY	c_m x_2	$\underline{x_1}$ x_2
LOR	x_2	x_2
MAU	a_m c x_{m2}	c $\underline{x_1}$
CHRIS	c x_2	c $\underline{x_1}$ x_2
PASA	a x_2	a $\underline{c}$ x_2

cf légende tableau 9

Les tableaux 12 et 13 montrent que :

- SABR, PASA, PY et LOR ne modifient ni le type de formulation, ni le type de composition des données entre le temps 1 et le temps 3. SABR et LOR rapportent également les mêmes quantités. PASA ajoute la quantité c et PY préfère à c et X2 les bilans X1 et X2.
- CHRO, ALIN et BEA ne modifient pas le type de formulation mais CHRO passe de la non-composition des quantités à la compostion totale en ajoutant aux trois données a, b et c, le bilan X2. ALIN et BEA passent de la composition partielle à la composition totale : ALIN ne fait qu'ajouter le bilan X2 tandis que BEA rapporte toutes les quantités données au bilan au temps 3.
- PAM et CHRIS conservent la composition totale des données mais changent de type de formulation. PAM rapporte plus de quantités au temps 3 mais il les formule en langage naturel alors qu'il le faisait sous forme de chiffre au temps 1. CHRIS passe d'une formulation par schéma et chiffre (IIC) à une formulation par langage naturel et chiffre et ajoute le bilan X1.

- MAU modifie et le type de formulation et le type de composition. Alors qu'il représente encore les nombres sous forme de symbole chiffré au temps 1, il les représente sous forme de dessins au temps 3. Il passe de la composition totale au temps 1 à la composition partielle au temps 3 et opère donc sur cette dimension une légère régression.

TABLEAU 14: CONDITION EXPERIMENTALE 4 : CHANGEMENTS INTERVENUS ENTRE LE TEMPS 1 ET LE TEMPS 3 DANS LES TYPES DE FORMULATION SELON LA COMPOSITION DES DONNEES (A , B ou C , D ou E)

N= 10

	TEMPS 1	A			B/C			D/E		
TEMPS 3		IID	IIC	IC	IID	IC	IIIC	IID	IIC	IC
A	IID									
	IIC									
	IC					SAB				
B/C	IID		PATR SAND							
	IC									
	IIIC									
D/E	IID									
	IIC				MAR				POTR MARC PHIL PASC LUC	STP
	IC									

TABLEAU 15 : QUANTITES REPRESENTEES AU TEMPS 1 ET AU TEMPS 3 PAR LES SUJETS DE LA CONDITION EXPERIMENTALE 4

	TEMPS 1	TEMPS 3
PATR	a b c	a b c $\underline{x_1}$
SAND	a b c	a b c $\underline{x_1}$
MAR	a b x_1	$\underline{c}$ x_1 $\underline{x_2}$
SAB	a c x_1	a $\underline{b}$ c
MARC	c x_2	c x_2
PHIL	c x_2	c x_2
PASC	c x_1 x_2	c x_1 x_2
LUC	c x_1 x_2	$\underline{a}$ $\underline{b}$ c x_2
STP	x_2	$\underline{a}$ $\underline{b}$ x_2
POTR	a b c x_2	a b c x_2

Contrairement à nos attentes, les modifications intervenues entre le temps 1 et le temps 3 dans les notations des sujets de CE4 sont de même ordre[1)] que celles des autres conditions expérimentales.

Les tableaux 14 et 15 montrent que :

- POTR, MARC, PHIL, PASC et LUC ne modifient ni le type de formulation, ni le type de composition des données. POTR, MARC, PHIL et PASC rapportent également les mêmes quantités au temps 1 et au temps 3. Seul LUC, tout en composant totalement les données, ajoute les données a et b au temps 3.
- SAB garde le même type de formulation (IC) mais passe de la composition partielle à la non-composition. Ce faisant, elle substitue la quantité b au bilan X1.
- PATR, SAND et MAR modifient à la fois le type de formulation et le type de composition des données. PATR et SAND passent de la non-composition à la composition partielle en ajoutant X1 aux données a, b, c. Ce faisant, ils passent d'une formulation dessinée dans laquelle figurent des chiffres (IIC) à une formulation dessinée uniquement (IID). MAR fait de même pour ce qui est du type de formulation mais passe de la composition partielle à la composition totale en substituant c et X2 aux quantités a et b.
- STP garde le même type de composition (totale) mais passe du type de formulation IC (langage naturel et chiffre) à IIC (dessins et chiffres).

Concernant les quatre conditions expérimentales, nous constatons de nombreuses modifications de notation entre le temps 1 et le temps 3. En particulier, nous avons pu vérifier que **tous** les sujets (9) de la condition expérimentale 1 **modifient** dans un sens ou dans un autre leur notation du temps 1. 9 élèves sur 11 de CE2 et 8 sur 10 de CE3 font de même, en changeant au moins un élément entre le temps 1 et le temps 3.

De tels changements sont peut-être un peu moins fréquents chez les enfants de CE4 dans lequel 4 sujets sur 10 reproduisent

1) Ceci du moins en ce qui concerne les types de formulation et les quantités signifiées.

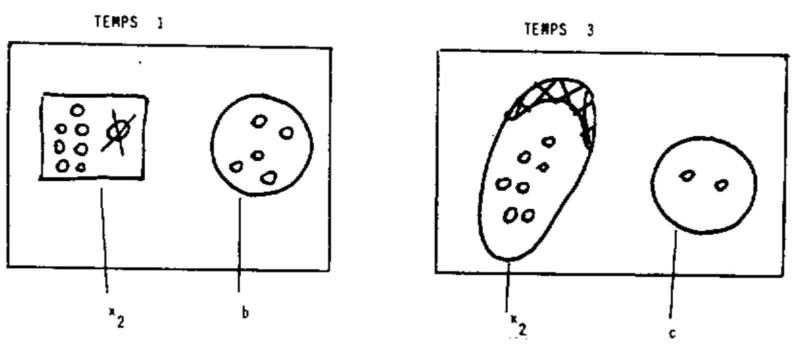
au temps 3 une notation absolument identique à celle du temps 1.

D'autre part, l'ensemble des modifications opérées dans les quatre populations expérimentales est resté interne à un type de formulation donné : L'enfant qui note selon un type IID au temps 1 continuera vraisemblablement à coder dans ce type de formulation au temps 3.

Nous avons analysé jusqu'ici les évolutions ou "régressions" intervenues entre le temps 1 et le temps 3 au niveau de la composition des quantités et de l'explicitation de ces quantités. Il est alors apparu qu'un certain nombres d'élèves ne semblent nullement modifier leur notation du temps 1. Les productions de ces sujets ainsi que celles des élèves qui "régressent" nous intéressent tout particulièrement et nous pensons utile de revoir les deux codages (temps 1 et temps 3) de quelques élèves afin de nous assurer que d'éventuels changements de formulation des contenus "annexes" qui ne sont pas pris en compte par les critères que nous avons appliqué jusqu'ici n'apparaissent pas.

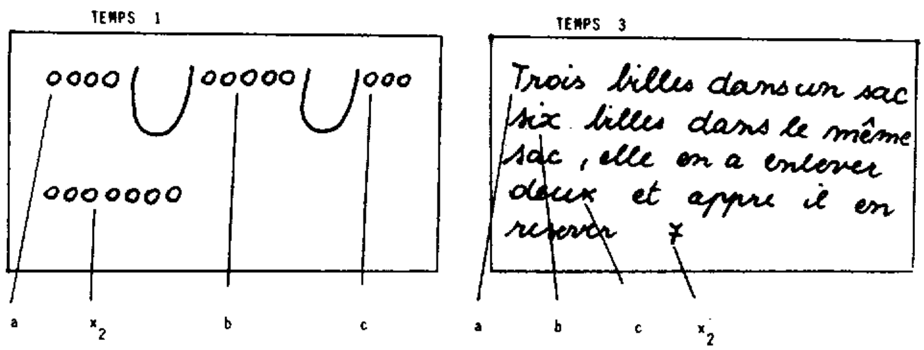
Condition expérimentale 1 :

SAN a été déclarée "stable" par nos critères précédents. Voici ses formulations :



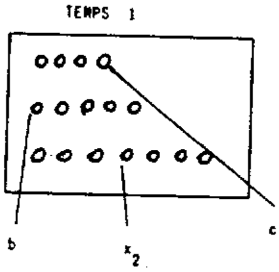
Dans ses deux notations, SAN représente la quantité finale qui se trouve dans le sac (X2). Au temps 1, elle signifie la quantité b et au temps 3 la quantité enlevée c. Dans un sens, la notation du temps 3 est plus correcte dans la mesure où effectivement, à la fin du jeu, nous sommes confrontées à la réalité concrète : 7 billes dans le sac et 2 dans le couvercle. En revanche, la notation du temps 1 ne traduit pas la réalité de l'opération, dans la mesure où la quantité b dessinée (5 billes) n'existe plus en-dehors du bilan de 7 billes. Nous constatons ainsi que signifier, en plus du bilan X2, la quantité b ou la quantité enlevée c n'est pas équivalent. Le changement apparemment minimum introduit par SAN au temps 3 peut donc aussi être considéré comme un progrès. A part cet élément, les deux formulations appartiennent au même type de formulation.

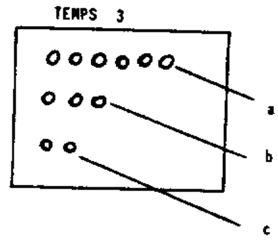
Prenons maintenant l'exemple de FRED qui modifie le type de formulation sans pour autant modifier ni la composition ni l'explicitation des quantités :



FRED, en changeant de registre de formulation, se donne les moyens d'expliciter bien plus d'éléments au temps 3 qu'au temps 1 : Les opérations exprimées en langage naturel ("enlever", "rester") sont explicites, elles n'étaient qu'implicites dans la schématisation de le type IID du temps 1. De plus il est important de souligner le chiffre 7 qui apparaît au temps 3 et qui désigne le changement de statut que la quantité-bilan représente par rapport aux autres quantités (signifiées, elles, en langage naturel).

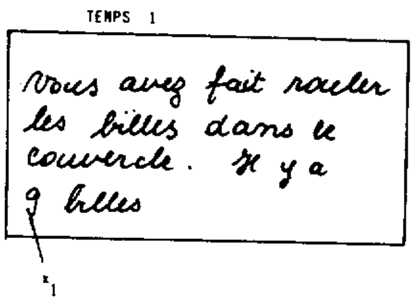
L'exemple de IDE montre en revanche que l'enfant, en restant dans le même type de formulation, se limite au temps 3 à signifier les données du problème :

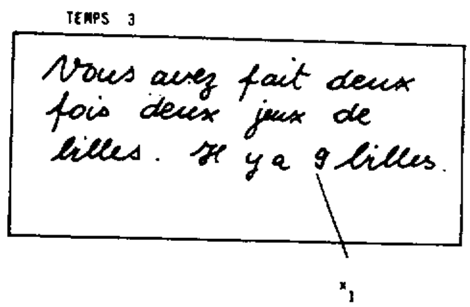




Condition expérimentale 2 :

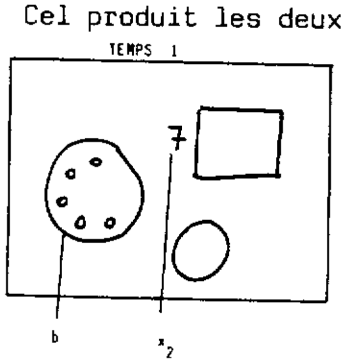
D'abord l'exemple de CYR : enfant qui d'après nos critères de typologie, d'explicitation et de composition ne semble rien modifier à ses formulations :

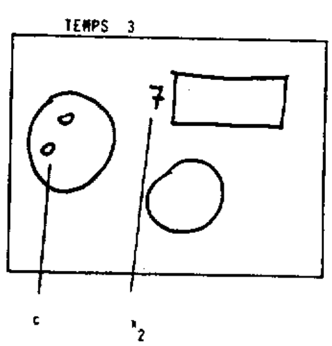




Nous constatons que dans les deux cas, CYR opère une composition partielle des données (a + b = X1) et qu'elle signfie cette composition par le seul bilan chiffré. Pourtant, nous notons une différence dans le début des notations. Les informations données au temps 1 concernent le "mouvement" des billes ("fait rouler") tandis qu'au temps 3, CYR mentionne le "jeu". Fait-elle référence au temps 1 ?

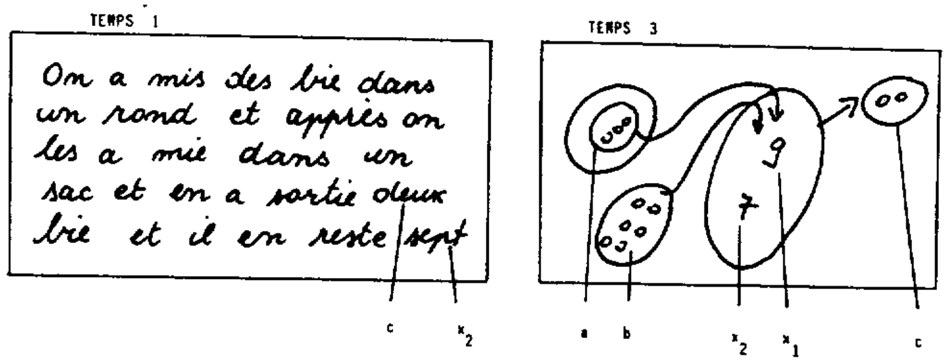
Cel produit les deux notations suivantes :





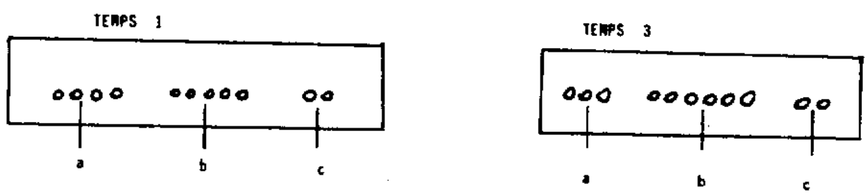
Nous retrouvons pour CEL la même trajectoire que celle décrite pour SAN (CE1) : Même composition, même type de formulation, même nombre de quantités explicitées mais abandon de l'explicitation de b au profit de c. Nous considérons ainsi que CEL "progresse" au temps 3.

Les tableaux 10 (p. 42) et 11 (p. 43) nous indiquent des éléments de progrès chez DAN. Plus d'explicitation des quantités et formulation du bilan X2 en quantité chiffrée. Voici les deux formulations :

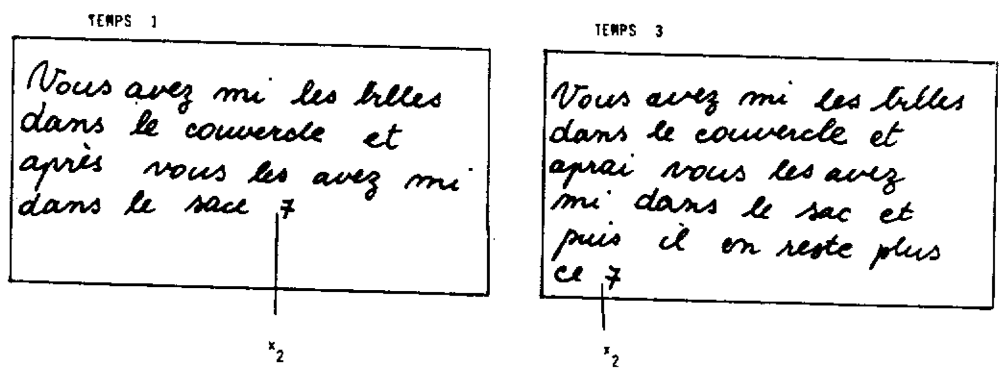


Condition expérimentale 3 :

SABR produit aux temps 1 et 3 deux notations identiques :

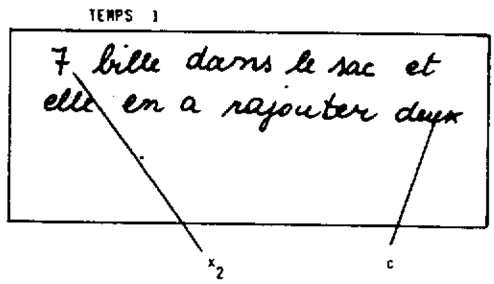


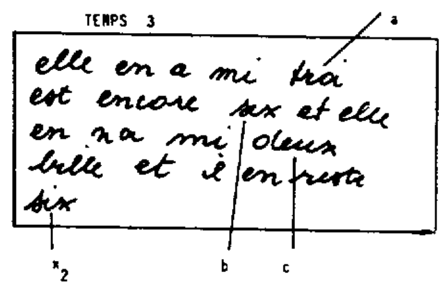
L'exemple de LOR est intéressant :



Dans les deux cas, LOR représente le bilan X2. L'enfant mentionne "sac" et "couvercle" mais au temps 3, un élément nouveau apparaît : "Il en reste plus que 7", qui permet au sujet de signifier quelque chose de plus que l'action "mettre" des billes dans un contenant (temps 1) et de laisser sous-entendre l'opération inverse ("enlever" des billes).

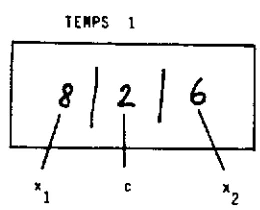
PAM aboutit dans les deux productions au bilan X2 mais au moment de les signifier par écrit, l'enfant **reconstruit** différemment les opérations :

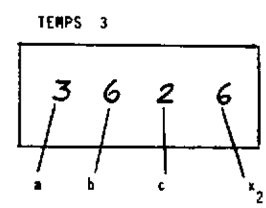




Au temps 1, PAM commence par citer le "bilan" (7). Or cette quantité n'est pas mentionnée comme étant le résultat d'une transformation opérée sur des objets mais comme la description d'un état final (7 billes dans le sac et 2 qui restent à la vue de l'enfant). En revanche, au temps 3, le "bilan" (6) est clairement l'aboutissement d'un calcul signifié (bien que de façon ambiguë car le verbe "mettre" sans indication ultérieure des "lieux" dans lesquels les billes sont mises, ne permet pas de différencier addition et soustraction) en langage naturel.

Condition expérimentale 4 :

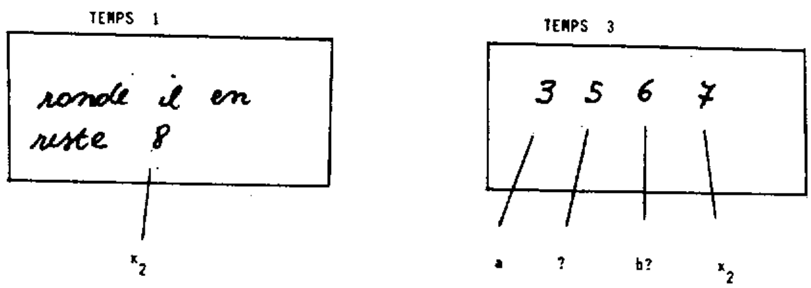




Dans les deux cas, Luc aligne des quantités dont l'une désigne le bilan final. Par les traits séparant les chiffres au temps 1 et par un espacement relatif entre les quantités au temps 3, l'enfant montre son souci de ne pas engendrer la lecture du nombre 826. Chaque quantité a un rôle à jouer, mais lequel ? Ni dans un cas, ni dans l'autre, la différence de statut des quantités est signifiée.

MARC, PHIL, PASC produisent des codages du même genre que LUC, sans spécifier davantage, au temps 3, le statut des quantités en jeu :

L'exemple de STP est intéressant :



Si au temps 1, nous ne **disposons que de** la quantité-bilan X2, nous savons pourtant qu'il s'agit de "ce qui reste". Au temps 3, l'enfant note 4 chiffres, tous sur le même plan (dont la quantité X2). Bien qu'en notant le chiffre 7 au temps 3, l'enfant **dise** qu'il s'agit de ce qui "reste", il n'estime pas utile de le spécifier par écrit.

Concernant les évolutions intervenues entre le temps 1 et le temps 3, nous proposons la synthèse suivante :

TABLEAU 16: CHANGEMENTS INTERVENUS ENTRE LE TEMPS 1 ET LE TEMPS 3 DANS LES DIFFERENTES CONDITIONS EXPERIMENTALES EN TENANT COMPTE DE LA COMPOSITION DES QUANTITES, DES QUANTITES SIGNIFIEES ET DES TYPES DE FORMULATION

		COMPOSITION DES QUANTITES (catégories A, B/C, D/E)		QUANTITES SIGNIFIEES (a,b,c,x_1,x_2)		TYPOLOGIE DE FORMULATION (cf tableau 1)		
		TEMPS 1	TEMPS 3	TEMPS 1	TEMPS 3	TEMPS 1	TEMPS 3	
CONDITION EXPERIMENTALE 1	LAU	A	A	c	$\underline{a\ b}\ c$	Ic	Ic	
	JOE	A	$\underline{E}$	a b c	$a\ b\ c\ \underline{x_1}\ \underline{x_2}$	IIc	$\underline{IId}$	
	DANI	A	$\underline{E}$	-	$\underline{c}\ \underline{x_2}$	Ic	Ic	
	MARI	B	B	$\underset{a}{b}\ x_1$	x_1	IId	IId	
	IDE	E	$\underline{A}$	$a\ b\ x_{a2}$	$a\ b\ \underline{c}$	IId	IId	
	SAND	E	$\underline{B}$	x_{a2}	$\underline{x_1}$	IId	IId	
	SAN	E	E	$\underset{a}{b}\ x_2$	$\underline{c}\ x_2$	IId	IId	
	PAT	E	E	x_2	$\underline{c}\ \underline{x_1}\ x_2$	Ic	$\underline{II}$	
	FRED	E	E	$a\ b\ c\ x_2$	$a\ b\ c\ x_2$	IId	$\underline{Ic}$	
CONDITION EXPERIMENTALE 2	CARO	A	$\underline{B}$	-	$\underline{a}\ \underline{c}\ \underline{x_1}$	I	$\underline{Ic}$	
	MIR	A	$\underline{B}$	a b c	$a\ b\ c\ \underline{x_1}$	IId	IId	
	NOE	B	$\underline{E}$	$a\ b\ c\ x_{a1}$	$a\ b\ c\ \underline{x_2}$	IId	IId	
	CYR	B	B	x_1	x_1	Ic	Ic	*
	STE	B	$\underline{D}$	$c\ x_1$	$c\ x_1\ \underline{x_2}(D)$	IIIC	IIIc	
	STAF	E	E	$c\ x_2$	$c\ x_2$	IId	IId	*
	DAN	E	E	$c\ x_2$	$\underline{a}\ \underline{b}\ c\ \underline{x_1}x_2$	II	$\underline{IIc}$	
	NIC	E	$\underline{A}$	$a\ b\ c\ x_{a2}$	a b c	Id	$\underline{IId}$	
	CEL	E	E	$\underset{a}{b}\ x_2$	$\underline{c}\ x_2$	IIc	IIc	
	SUE	E	E	x_2	$\underline{c}\ x_2$	Ic	Ic	
	YVA	E	E	$c\ x_2$	$\underline{a\ b}\ c\ x_2$	Ic	Ic	
CONDITION EXPERIMENTALE 3	SABR	A	A	a b c	a b c	IIa	IId	*
	CHRO	A	$\underline{E}$	a b c	$a\ b\ c\ \underline{x_2}$	IId	IId	
	BEA	B	$\underline{E}$	$c\ x_{a1}$	$\underline{a\ b}\ c\ \underline{x_2}$	Ic	Ic	
	ALIN	B	$\underline{E}$	$c\ x_1$	$c\ x_1\ \underline{x_2}$	IId	IId	
	PAN	E	E	$c\ x_2$	$\underline{a\ b}\ c\ x_2$	Ic	$\underline{II}$	
	PY	E	E	$\underset{a}{c}\ x_2$	$\underline{x_1}\ x_2$	Ic	Ic	
	LOR	E	E	x_2	x_2	Ic	Ic	*
	MAU	E	$\underline{B}$	$\underset{a}{a}\ c\ x_2$	$c\ \underline{x_1}$	IIc	$\underline{IId}$	
	CHRIS	E	E	$c\ x_2$	$c\ \underline{x_1}\ x_2$	IIc	$\underline{Ic}$	
	PASA	E	E	$a\ x_2$	$a\ \underline{c}\ x_2$	IId	IId	
CONDITION EXPERIMENTALE 4	PATR	A	$\underline{B}$	a b c	$a\ b\ c\ \underline{x_1}$	IIc	$\underline{IId}$	
	SAND	A	$\underline{B}$	a b c	$a\ b\ c\ \underline{x_1}$	IIc	$\underline{IId}$	
	MAR	B	$\underline{E}$	$\underset{a}{a}\ \underset{a}{b}\ x_1$	$\underline{c}\ x_1\ \underline{x_2}$	IId	$\underline{IIc}$	
	SAB	B	$\underline{A}$	$a\ c\ x_{a1}$	$a\ \underline{b}\ c$	Ic	Ic	
	MARC	E	E	$c\ x_2$	$c\ x_2$	IIc	IIc	*
	PHIL	E	E	$c\ x_2$	$c\ x_2$	IIc	IIc	*
	PASC	E	E	$c\ x_1\ x_2$	$c\ x_1\ x_2$	IIc	IIc	*
	LUC	E	E	$c\ x_{a1}\ x_2$	$\underline{a\ b}\ c\ x_2$	IIc	IIc	
	STP	E	E	x_2	$\underline{a\ b}\ x_2$	Ic	$\underline{IIc}$	
	POTR	E	E	$a\ b\ c\ x_2$	$a\ b\ c\ x_2$	IIc	IIc	*

* Ces élèves n'ont apporté aucune modification dans leur production sur aucune des trois dimensions considérées

Le tableau 16 reprend l'ensemble des changements intervenus entre le temps 1 et le temps 3 selon les trois dimensions centrales considérées dans cette étude : composition et explicitation des quantités ainsi que types de formulation.

Pour la clarté des résultats, il est important de souligner que les sujets de notre population sont classés pour la plupart et dès le temps 1 dans la catégorie de composition la plus complète et exhaustive (E). Dans l'ensemble, nous disposons donc d'une groupe d'élèves qui "plafonnent" sur cette dimension. Les sujets qui effectuent le type de composition A ou B au temps 1 ne sont que 17 (répartis de façon homogène dans les quatre conditions expérimentales). La plupart d'entre eux (12) progressent entre le temps 1 et le temps 3 en opérant ainsi une composition plus complète des données du problème.

Concernant les sujets qui effectuent une composition totale (E) au temps 1, il nous importe de considérer encore une fois le développement au niveau de l'explicitation des quantités et des modifications (même relativement fréquentes) intervenues dans les types de formulation.

Dans l'ensemble, nous constatons que les sujets qui effectuent une composition totale appartenant à la condition CE4 sont ceux qui semblent les moins susceptibles de changement (4 sujets sur 6 ne modifient aucun élément de leur notation entre le temps 1 et le temps 3). En revanche, tous les sujets de CE1 modifient au moins un terme de leur formulation du temps 1.

3. LE TEMPS 2

Il nous semble maintenant important d'analyser les productions du temps 2 afin d'en dégager une spécificité éventuelle, en fonction de la tâche et des relations interpersonnelles en jeu.

Les tableaux 17, 18 et 19 portent respectivement les informations relatives à CE1, CE2 et CE3 au temps 2 de l'expérience. Rappelons que les productions rapportées et classées dans ces tables sont le fruit d'un codage individuel : Les trois conditions expérimentales se différencient par le feedback à ce codage (cf p. 6 et 7). Rappelons que l'opération en jeu était la suivante :

$$2 + 6 - 3 = 5$$

TABLEAU 17 : CONDITION EXPERIMENTALE 1 -TEMPS 2

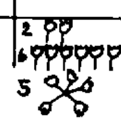
NOM	COMPOSITION ET EXPLICITATION DES DONNEES QUANTITES	OPERATIONS	CATEGORIE DE COMPOSITION	TYPES DE FORMULATION	AUTRES CONTENUS SUJET DE L'ACTION	LIEU	AUTRES SPECIFICATIONS	INFORMATIONS REDONDANTES	Catégories de composition et types de formulation du temps 1 et du temps 3 : temps 1	temps 3
	a b c x_1 x_2	+ - $=_1$ $=_2$								
LAU			A	Ic	je elle(copine)	école	en allant à l'école/ pris des fleurs une copine/ elle m'a demandé/ elle pouvait en avoir/ j'ai dit oui		A / Ic	A / Ic
PAT	c	donné (-)	A	I	je		j'ai fait un bouquet de fleurs/j'ai rencontré un copain/je lui ai donné trois fleurs		E / Ic	E / I1
MARI	a b	espacement (+?)	A	II			(dessin des fleurs)		B / IId	B / IId
SAN	c x_1	entouré (-)	B	II			(dessin des fleurs)		E / IId	E / IId
DANI	c x_1	donné (-)	B	Ia	je		fleurs/ ma copine		A / Ic	E / Ic
IDE	c x_1 x_2		E	II			ronds dessinés		E / IId	A / IId
FRED	c x_1 x_2		E	II			fleurs dessinées		E / IId	E / Ic
SANO	x_2		E	II			ronds dessinés		E / IId	B / IId
JOE	a b c x_2	→ (+) (-)	E	IIa					A / IIc	E / IId

TABLEAU 18 : CONDITION EXPERIMENTALE 2 - TEMPS 2

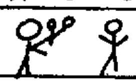
NOM	COMPOSITION ET EXPLICITATION DES DONNEES QUANTITES: a b c x_1 x_2 — OPERATIONS: + - $=_1$ $=_2$	CATEGORIE DE COMPOSITION	TYPES DE FORMULATION	AUTRES CONTENUS: SUJETS DE L'ACTION	LIEU	AUTRES SPECIFICATIONS	INFORMATIONS REDONDANTES	Catégories de composition et types de formulation des temps 1 et 3: temps 1	temps 3
NIC		A	II					E / Id	A / IId
STAP		A	II					E / IId	E / IId
MIR	c x_1 mi auter (+) (-)	B	Ia	je		fleur		A / IId	B / IId
CYR	x_1 il y a ($=_1$)	B	Ia	je		fait deux bouquets de fleurs		B / Ic	B / I c
NOE	a* b* x_1*	B	II			dessin fleurs		B / IId	E / IId
DAN	c x_2 (-)	E	Ia	je(le copain)		je voudrais 3 fleurs 	 et 3 fleurs	E / II	E / IIc
SUE	c x_2	E	Ia	vous		vous avez caché		E / Ic	E / Ic
CEL	c x_1 x_2	E	IIa				5 8 3 	E / IIc	E / IIc
YVA	a b x_2	E	Ia	je		deux bouquets dans une main/ elle a pris les 5 fleurs		E /Ic	E / Ic
STE	c x_1 x_2	E	Ia			fleurs		B / IIIc	D / IIIc
CARO	a c x_1	B	II	elle		donné à la fille/ venir voir /fleurs		A /I	B / Ic

TABLEAU 19 : CONDITION EXPERIMENTALE 3 - TEMPS 2

NOM	COMPOSITION ET EXPLICITATION DES DONNEES QUANTITES: a b c x_1 x_2 — OPERATIONS: + - $=_1$ $=_2$	CATEGORIE DE COMPOSITION	TYPES DE FORMULATION	AUTRES CONTENUS: SUJET DE L'ACTION	LIEU	AUTRES SPECIFICATIONS	INFORMATIONS REDONDANTES	Catégories de composition et types de formulation des temps 1 et 3: temps 1	temps 3
BEA	a b c donner (indifférencié)	A	Ia	elle/ je	chemin de l'école	je voulais donner à la maîtresse d'école / une fille sa maîtresse		B / Ic	E / Ic
ALIN	a b x_1 barre de séparation (+)	B	II			dessin fleurs		B / IId	E / IId
PY	c x_1 il m'en reste ($=_1$)	B	Ia	on		fleurs à un copain		E / Ic	E / Ic
CHRI	a c ? ? donner / il en reste (-) ($=_1$? $=_2$?)	?	Ia	on		fleurs		E /IIc	E /Ic
CHRO	a b c x_2 ($=_2$?)	E	II			dessin fleurs		A / IId	E / IId
PAM	a b c x_2 et encore (+) je donne (-) il m'en reste ($=_2$)	E	Ia	elle		petite fille/bouquet/ sa maitresse		E /Ic	E/ II
LOR	x_2 il en reste ($=_2$)	E	Ia	vous		fleurs/ vous m'avez demandé combien il en reste		E / Ic	E / !c
SABR	a b c x_2 ?	E ?	II			dessin fleurs		A / IId	A / IId
PASA	x_2	E	IIa			dessin de fleurs / dessin de deux personnages 		E / IId	E / IId
MAU	x_2	E	IIa			dessin école et deux personnages 		E /IIc	B / IId

Si nous prenons momentanément ces productions en considération, en les isolant de la microhistoire expérimentale qui les précède, nous constatons que :

a) <u>A propos des catégories de composition</u>

Nous retrouvons à peu près la même proportion de sujets effectuant un type de composition A, B ou E dans les trois conditions expérimentales. En CE3, il y a même un peu plus de sujets de type de composition E que dans les deux autres conditions. Notons encore que le seul élément qui différencie les sujets lors de ce codage individuel est l'aspect "type de décodage **mentionné** dans la consigne"[1]. Aucun élève n'a été confronté jusqu'ici qu'à l'expérimentatrice.

b) <u>A propos des formulations utilisées pour signifier les opérations</u>

Les formulations utilisées pour signifier les opérations sont au temps 2 peu présentes. Même les formulations en langage naturel différencient les opérations de façon ambiguë : Le verbe "donner" désigne souvent la soustraction.

DANI (Condition expérimentale 1)

J'ai prix 7 fleurs et jant net donner
3 à mon copine

c x_1

BEA (Condition expérimentale 3)

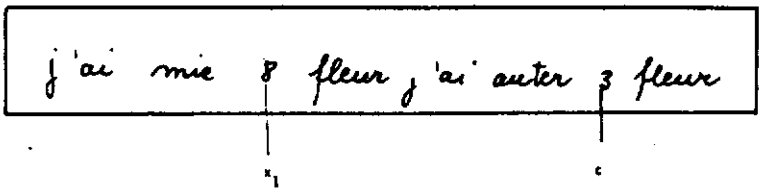
Il y avait des fleurs elle man na
donner deux fleurs et elle man na
dononer 5 fleurs a mai et je voulai
donner à la maitresse d'école en
chemain de l'école il y avait une
fille .. j'ai donner 3 fleurs pour
qu elle donne a la maitresse

b a c

1) Pour CE1, c'est la perspective d'un décodage réel où il est question de **refaire** la tâche; pour CE2 le décodeur doit **dire** ce qu'il comprend et pour CE3 la différence par rapport à CE1 est minime : "Il faut noter pour qu'un autre enfant puisse comprendre et refaire la même chose", dit-on au sujet mais en réalité seule l'expérimentatrice **sait** explicitement que la confrontation ne se réalisera pas dans les faits. Ceci n'est pas **explicitement** dit à l'enfant. Peut-on alors dire que les sujets de CE3 seraient comparables à ceux de CE1 ?

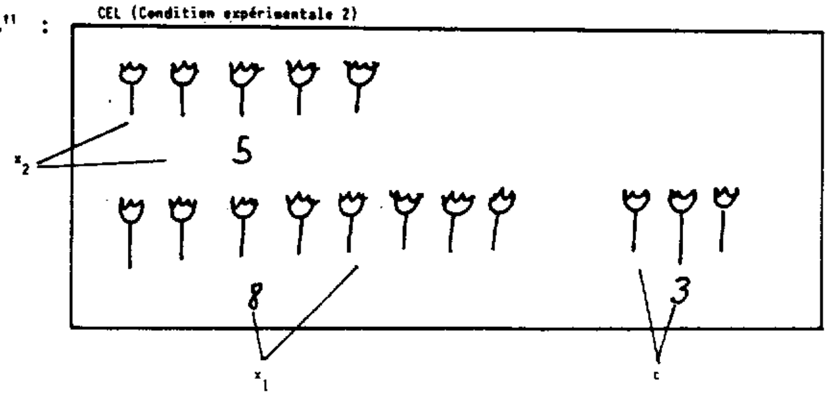
Un seul enfant utilise le verbe "ôter" sans pour autant composer toutes les données :

MIR (Condition expérimentale 2)



Lorsque les élèves utilisent le registre "dessin", les opérations sont encore moins signifiées : Il s'agit la plupart du temps d'une juxtaposition de "tas de fleurs" ou de "lignes de fleurs" :

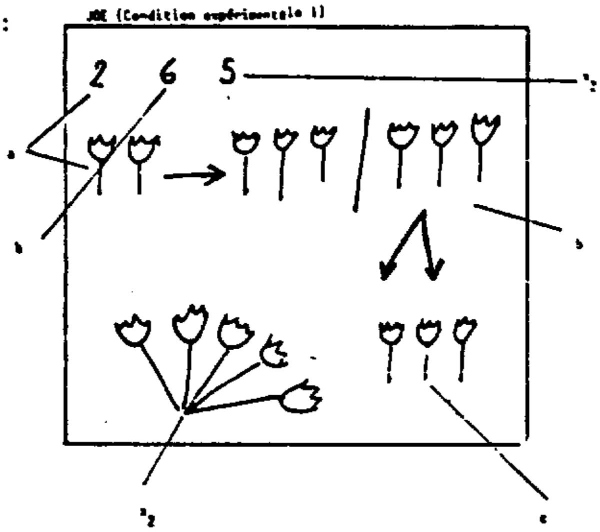
CEL (Condition expérimentale 2)



Dans l'exemple de CEL, rien n'indique le statut des trois quantités décrites.

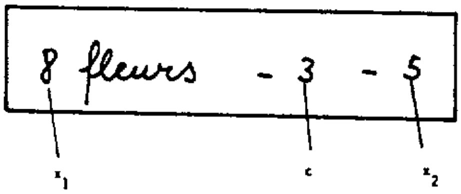
En revanche, JOE introduit un système fléché montrant **l'intention de discriminer** les quantités ajoutées de celles enlevées :

JOE (Condition expérimentale 1)



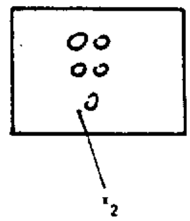
Ainsi, soit en langage naturel, soit par le dessin, les différentes formulations sont généralement très explicites sur la nature des objets en jeu dans la situation-problème mais elles le sont nettement moins en ce qui concerne les opérations en jeu. Les personnages figurent souvent ainsi que les fleurs. Deux productions seulement proposent un codage qu'on peut appeler "dépouillé". Il s'agit de STE (qui mentionne pourtant le fait qu'il s'agisse de fleurs) :

STE (Condition expérimentale 2)



et surtout de SANO :

SANO (Condition expérimentale 1)



SANO se limite à dessiner le bilan final en schématisant les fleurs par de petits ronds.

c) A propos des types de formulation

Nous constatons qu'aucune production n'est de type IIIC (opérations formulées à l'aide de signes arithmétiques); en revanche, le langage naturel (IL, IC et ID) est très fréquent, ainsi que ce que nous appelerons par commodité le "dessin" (types IID et IIC).

TABLEAU 20: TYPES DE FORMULATION ET COMPOSITION DES DONNEES

COMPOSITION DES DONNEES	TYPES DE FORMULATION I	IL	IC	IID	IIC	nombre de sujets
A	1	1	1	3	0	6
B/C	0	1	3	3	0	7
D/E	0	0	7	4	4	15
Totaux	1	2	11	10	4	28*

* manquent deux sujets de la condition expérimentale 3 dont la production n'est pas clairement classifiable du point de vue de la composition des données (cf Tableau 19, sujets CHRI et SABR)

Si nous mettons en relation le type de composition effectué sur les données et le registre utilisé pour les signifier, nous constatons que les quantités chiffrées (IC et IIC) apparaissent surtout (mais pas exclusivement) lorsqu'il y a composition (même partielle) des données du problème.

Parmi les 15 enfants qui composent totalement les données, seuls 4 représentent le bilan X2 par le dessin de la quantité. Les autres enfants chiffrent le total nouvellement produit, même si les autres quantités ont été jusqu'ici "dessinées" ou écrites en langage naturel.

Si nous tenons compte aussi des types de formulation du temps 1, nous pouvons observer que 21 enfants sur 30 proposent au temps 2 le même type qu'au temps 1. La nouvelle "face objectuelle" du temps 2 ne semble donc pas avoir entraîné une modification fondamentale dans le type de formulation que l'enfant privilégie dans le contexte de cette expérience. Nous avons pu vérifier que 17 élèves sur 30 maintiennent fermement le même type de formulation tout au long des trois temps expérimentaux. Dans ce cas, il s'agit surtout des types IC (7 sujets) et IID (10 sujets). Nous retrouvons ce type de conduite dans les trois conditions expérimentales.

Il est pourtant utile de souligner que les sujets de CE1 semblent recourir au temps 2 à des types de formulations quelque peu différentes que les enfants de CE2 et CE3 : 2 sujets seulement de CE1 recourent aux quantités chiffrées alors que 7 y font appel en CE2 et 7 également en CE3. Les codeurs de CE1 optent plutôt pour le langage naturel et surtout pour le dessin seul (les quantités elles aussi sont dessinées).

Le tableau 21 spécifie les types de formulation utilisées au temps 2 dans les trois conditions expérimentales :

<u>TABLEAU</u> 21: TYPES DE FORMULATION ET CONDITIONS EXPERIMENTALES AU TEMPS 2

	I	IL	IID	IC	IIC	N
CE 1	1	1	5	1	1	9
CE 2	-	-	4	6	1	11
CE 3	-	-	3	5	2	10
N	1	1	12	12	4	30

d) <u>A propos des autres contenus</u>

D'après les tableaux 17, 18 et 19, il nous semble que les élèves donnent d'autant plus de détails sur "l'histoire" qu'ils ne composent pas les données. Ainsi LAU et PAT (CE1) précisent longuement le contexte, de même que BEA (CE3), sans pour autant composer les quantités.

Les informations redondantes sont très peu fréquentes.

Quant au sujet de l'action, nous remarquons que seuls 4 enfants de CE2 et de CE3 font référence à l'expérimentatrice ("elle", "vous"). La plupart des élèves se situent comme sujet de l'action ("je").

V. CONCLUSIONS

> "(...) Fait de la mathématique celui qui est capable, face à une réalité, de séparer l'essentiel de l'accessoire, de favoriser certains éléments et certaines relations de cette réalité, de les analyser, d'en distinguer certaines propriétés, de les décrire, de les simplifier, de les symboliser, de les formaliser, de les comprendre, de faire des prévisions à leur sujet, de confronter ces prévisions avec la réalité, de transformer cette dernière."
>
> Gérard Charrière, mathématicien

> "Dans la mesure où on les (les mathématiques) fait passer pour le modèle de la démonstration scientifique d'une pensée conforme à des règles et appliquant constamment des règles qui conduisent de prémisses claires à des conclusions sans failles, qui mènent d'un théorème à un autre théorème, avec au bout l'indispensable C.Q.F.D., elles incarnent d'abord l'opposition du démontratif et de l'inventif. (...) Au prix de simplifications massives, le calcul, le formalisme remplissent la fonction de garants de la valeur d'une théorie et sont considérés en tant qu'instruments ayant surtout pour fin la démontration".
>
> Serge Moscovici, psychosociologue

1. Des enfants, des adultes, des mathématiques, des réalités

Ces deux citations nous semblent utiles pour rappeler l'univers de pensée, la "tradition" culturelle qui sous-tendent la discipline mathématique et instituent la "discipline" propre aux mathématiques. Nous ne prétendons nullement nier la spécificité de la pensée mathématique du mathématicien; de même que nous concevons absolument la nécessité d'initier et d'éduquer les élèves (au travers d'un inévitable processus de transposition didactique[1]) à un type d'acculturation particulier défini par le projet social de construction didactique des savoirs mathématiques.

Souligner la distance et l'irréductibilité qui existent entre le savoir savant et le savoir devenu "objet d'enseignement" nécessite cependant l'étude des conditions particulières dans lesquelles toute transposition didactique s'actualise. Une forme de vigilance épistémologique accrue concernant l'objet créé (ou reconstruit) pour l'enseignement ne constitue alors qu'une des dimensions de l'étude. Un autre aspect de l'analyse porte, à notre sens, sur les **rapports à l'objet de savoir** devenu pour les uns (les enseignants) **"objet d'enseignement"**, pour les autres (les élèves) **"objet d'apprentissage"** et pour d'autres encore (les chercheurs qui étudient le système d'enseignement et les conditions d'accession au savoir scolaire) **"objet d'étude"** des conditions et modes d'appropriation (ou d'enseignement) de l'objet d'apprentissage/enseignement.

Ces distinctions essentielles du point de vue heuristique sont généralement escamotées par la désignation universelle du

1) Verret (1975) marque par ce concept la différence entre la "pratique d'invention" et la "pratique de transmission" des savoirs. D'une pratique à l'autre, l'objet se trouve transformé. Chevallard a développé et précisé la nature de ces processus en didactique des mathématiques (1980, 1982) et Conne a élaboré une description détaillée du phénomène à travers l'enseignement de mathématique en deuxième année de l'école primaire (1981).

nom scientifique : Tout le monde croit faire des "Mathématiques" et pourtant chacun se réfère à la représentation qu'il s'est construite (dans des pratiques sociales diverses) de la discipline savante. Nous-mêmes (psychosociologues, non-mathématiciennes), nous avons conçu cette recherche à partir de certains présupposés (des "idées derrière la tête") relatifs entre autres aux mathématiques, à leur enseignement et aux conditions de leur appropriation par les élèves; mais n'appartenant pas à la "cité scientifique" des mathématiciens, nous pensons, dans le cas présent, avoir pu "suivre" avec plus d'aisance que certains mathématiciens le cheminement de l'élève, sans avoir à nous déconditionner[1)] du savoir savant et de sa mise en forme. Il nous a donc été facile de ne pas adopter exclusivement des **critères normatifs** pour interpréter le savoir des élèves (ici les formulations écrites de problèmes additifs). Ceci dit, il est aussi probable que "l'ouverture" que nous avons laissé entrevoir à l'enfant par nos consignes ait pu l'inciter à interpréter la demande comme une tâche ne relevant que partiellement des mathématiques. Une interprétation possible de l'enfant est la suivante : Il est bien question de faire un calcul (sous-entendu "dans la tête") mais **par écrit**, il faut "en dire plus", noter "tout ce qui s'est passé" et pas seulement les opérations. Une telle attribution de signification à l'acte de questionnement et aux consignes irait tout à fait dans le sens des formulations en langage naturel ou dessinées avec composition totale des données du problème. Notre objet d'étude devient alors prioritairement celui d'analyser ce que fait l'enfant avec et face aux consignes que nous avons construites en les concevant comme des situations de formulation et de validation[2)]. Nous ne

1) Notre sensibilité à ce sujet vient notamment des discussions menées avec F. Conne, mathématicien de formation.

2) Nous évitons ici de définir d'emblée et définitivement ces situations; nous verrons par la suite que tout contexte peut être interprété différemment par les interlocuteurs et subir ainsi des effets de glissement de sens.

sommes donc ni les garants d'activités mathématiques "véritables" (pour qui ?), ni des ingénieurs didacticiens ayant mis au point une "bonne situation" devant permettre à "tous les enfants" de s'approprier l'écriture mathématique conventionnelle.

Par nos consignes relativement floues, nous ne visions pas nécessairement "l'essentiel", la "simplification", voire le côté "démonstratif", mais plutôt la dimension "inventive" du savoir. Mais, ce faisant, nous nous gardons bien de réifier les processus d'invention car, ce qui nous intéresse, c'est "la réinvention de l'élève" qui, comme dit Verret (1975), "a **toujours sur l'invention du chercheur l'avantage, sinon de savoir déjà ce qu'elle doit inventer, du moins de n'avoir à inventer - en vérité plutôt découvrir - que ce qui est déjà su. Ce "déjà su" finalise avec l'intervention du maître, directive ou non (...) le procès de recherche de l'élève".**

2. La recherche présentée

Cette recherche s'inscrit justement dans l'étude de ce **processus socio-cognitif de recherche de l'élève** et constitue le prolongement des recherches précédentes (Schubauer-Leoni et Perret-Clermont 1981 et 1984 a et b; Brun et Schubauer-Leoni 1981 et 1982) autour de ce même objet d'enseignement/apprentissage (les opérations additives et leurs formulations).

Ce dernier travail nous a permis un développement théorique certain : D'une part nous avons vérifié (sur cette nouvelle population) la présence des trois grands registres de formulation déjà mis en évidence par les recherches précédentes (langage naturel, dessin, écriture arithmétique) et nous avons pu affiner nos instruments d'analyse en différenciant les formulations relatives aux quantités et aux opérations sur ces quantités. Nous avons alors abouti à une **typologie**

théorique des formulations, typologie dont la pertinence a été confirmée par sa mise à l'épreuve sur les productions écrites des élèves. D'autre part, nous avons également vérifié l'intérêt que présente l'**articulation** des types de formulation avec la **composition** opérée par le sujet sur les données du problème (catégories A/B ou C, D/E).

Concernant **les hypothèses** et compte tenu des résultats obtenus dans les précédents travaux[1)], nous étions bien conscientes du fait que nos "mises en scène" expérimentales présentaient des différences trop peu saillantes (aux yeux des sujets du moins !) pour que les productions puissent se différencier fondamentalement. Nous avons pourtant voulu jouer le jeu expérimental classique en postulant une hiérarchie possible des productions selon les contextes (cf pages 8 et 9).

Or, la constatation selon laquelle ces différences de contexte[2)] n'engendrent (au cours de la micro-histoire expérimentale) que des différences minimes à la fois dans la composition des données et dans les formulations adoptées, nous paraît constituer un élément non négligeable. En effet,

1) Ces travaux mettaient tout particulièrement en évidence la supériorité des formulations produites par deux codeurs en interaction notant un message pour un tiers-décodeur réel ou potentiel (la contrainte d'une seule feuille de papier et d'un seul crayon devant favoriser la collaboration).

2) Différences se situant dans le cas présent essentiellement au niveau de la **consigne** et non dans des relations interpersonnelles contrastées.

comparable. Seuls les sujets de la condition 4 (sans temps 2) semblent moins modifier leur codage entre le temps 1 et le temps 3.

Pour l'ensemble de la population, rappelons que :

- Les sujets privilégient certains types de formulation, le dessin seul (type IID) et le langage naturel (pour signifier les opérations) qui intègre les chiffres (pour désigner les quantités) (type IC), et ceci soit que l'enfant compose partiellement les données (catégories B/C), soit qu'il se limite à les décrire (catégorie A). Par ailleurs, lorsque l'enfant ne signifie aucune quantité, il relate sa version de "ce qui s'est passé" uniquement par le langage naturel.
- Lorsque la composition des quantités est totale, les quantités chiffrées apparaissent plus massivement (types IIC, IC, IIIC).
- Compte tenu de notre classification théorique des types (cf tableau 1, page 12), nous observons que certains types ne correspondent à aucune formulation rencontrée : Les enfants ne semblent donc pas recourir à des utilisations conjointes du langage naturel et du dessin (ID), du langage naturel pour les quantités et des signes arithmétiques pour les opérations (IIIL).
- L'écriture arithmétique est très peu utilisée, contrairement au langage naturel. Nous rappelons donc le fait que de composer les données ne signifie pas que l'enfant recoure nécessairement à l'écriture équationnelle ni qu'il signifie nécessairement plus de quantités. Parfois le bilan seul suffit.
- Bien que le contexte que nous voulions créer soit un contexte de communication, les "messages" des enfants ne paraissent pas toujours avoir une valeur de communication. Nous pensons en particulier aux dessins qui semblent tenir surtout d'une notation "à usage personnel", sorte "d'instru-

notre conception de la recherche[1] considère qu'il est tout aussi important de montrer que tel contexte expérimental produit des conduites qui se différencient de celles émergeant dans tel autre contexte que d'attirer l'attention sur le fait que les enfants (face à une situation-problème comme la nôtre) ne sont pas sensibles à tous les "moindres" changements contextuels. Il nous est évidemment pas possible d'affirmer que les enfants "n'ont pas" perçu la différence entre les consignes (cf conditions 1 et 2), mais nous pouvons constater que les productions écrites des élèves des quatre conditions expérimentales sont sensiblement semblables et qu'elles se modifient au cours des trois temps expérimentaux de façon

1) Il est bien clair que nous travaillons dans ce cas selon un modèle de recherche qui est celui traditionnellement cher aux psychologues (que nous sommes aussi) et qui privilégie l'enquête "en-dehors de la classe scolaire" et l'analyse par entretien clinique avec l'enfant. Mais en tant que chercheurs en didactique, il nous paraît essentiel de ne pas limiter l'étude relative à l'enseignement des mathématiques à ce seul type de regard empirique. Il nous paraît même **épistémologiquement erroné** de tirer des données comme celles que nous discutons dans ce contexte, des conséquences **directes** pour l'enseignement. Un travail de recherche qui a comme centre la salle de classe, qui s'effectue en collaboration avec les enseignants et qui inclut ces derniers dans le modèle théorique d'analyse, est de toute première importance. Nous n'en parlerons pourtant pas plus longuement dans cet article. La démarche poursuivie ici n'est pas négligeable pour autant car elle joue, entre autres, un rôle important dans l'élaboration des instruments d'analyse eux-mêmes. Compte tenu de notre thèse relative à l'impact du contexte sur la construction sociale du savoir, nous estimons nécessaire de considérer sérieusement la **spécificité de focalisation sur l'objet** que ce type d'intervention permet. Cela signifie que, si nous postulons que le savoir de l'élève se construit dans des contextes donnés que nous tentons de saisir par nos recherches, un processus similaire de construction sociale et de focalisation spécifique sur l'objet notamment intervient a fortiori dans l'élaboration de notre propre savoir qui, pour ces raisons mêmes, doit se garder de décontextualisations et de généralisations abusives.

ment de travail" qui aide la découverte de la solution.

- Au niveau des contenus dits "annexes" des formulations, nous constatons que les productions des élèves de cette expérience sont relativement "dépouillées", contrairement à d'autres formulations obtenues dans d'autres contextes. Notons que les consignes et manipulations des temps 1 et 3 sont aussi à l'enseigne des éléments "essentiels" nécessaires à une opération arithmétique. Les productions du temps 2 ainsi que les consignes qui les ont engendrées sont, elles, plus généreuses en détail.

3. Encore un mot à propos de la notion de "représentation"

Nous n'allons pas reprendre dans ce cadre les conceptions que ce terme recouvre chez différents auteurs et dans des champs scientifiques divers. Ce travail mériterait néanmoins d'être entrepris pour la clarté et la poursuite du débat. Nous nous limiterons pour l'instant à esquisser quelques éléments qui n'ont pas d'autres prétentions que de mieux préciser le statut théorique de nos observations précédentes relatives aux "représentations écrites" des élèves. En effet, il nous semble important de préciser, à l'instar de Vergnaud (1981), que **"la notion de représentation ne se réduit pas à la notion de symbole ou de signe, car elle couvre aussi la notion de concept"**. Concepts et notions reflètent selon Vergnaud **"à la fois le monde matériel et l'activité du sujet dans ce monde matériel"**. Ceci dit, nous avons bien sûr l'impression que la notion de représentation comporte un aspect dynamique d'élaboration et qu'elle implique un travail de construction certain de la part du sujet. Nous dirions même qu'il s'agit d'un travail continu de **reconstruction** sur des plans différents de réalités **préconstruites**[1]. Pensons par exemple à la grande

1) Préconstruites lors de constructions préalables des sujets au cours de leur histoire, mais aussi préconstruites par **d'autres sujets** de la situation.

dichotomie qui existe entre le travail de reconstruction d'une réalité par représentation **orale** et le travail de reconstruction par représentation **écrite**.

Cependant ces éléments nous semblent encore réducteurs : Ils ne peuvent rendre compte que d'**un aspect** de l'élaboration des représentations (qu'elles soient orales ou écrites) par l'individu. Compte tenu des caractéristiques relatives aux propriétés d'ordre intellectuel et sensoriel du processus, nous pensons nécessaire de doubler cette conception théorique par ce qu'on pourrait appeler un **processus de métareprésentation** de la part du sujet, processus qui correspondrait à l'ensemble des **significations** que le sujet attribue à la fois à la situation sociale d'observation et de questionnement[1] et à sa compréhension cognitive de la tâche.

Tenter d'atteindre également ce niveau de rationalité constituerait à nos yeux un pas en avant dans l'étude de l'ensemble du processus représentationnel.

1) Pour nous, l'objet n'existe qu'en fonction des moyens que nous nous donnons pour le saisir et puisqu'il n'est pas possible d'étudier un individu sans l'observer, il nous paraît fort utile pour l'exhaustivité de l'analyse de pouvoir intégrer cet aspect dans le modèle théorique.

L'ELABORATION DES FORMULATIONS DANS UN JEU EN ARITHMETIQUE

El Hadi SAADA, Jean BRUN

Cette recherche s'inscrit dans un ensemble de recherches sur les écritures équationnelles, et nous remercions Anne-Nelly PERRET-CLERMONT, Maria-Luisa SCHUBAUER-LEONI et François CONNE des nombreux échanges sur ce thème dont nous avons bénéficié.

1. Position du problème

Devant les difficultés que posent à de jeunes élèves les formulations écrites en arithmétique nous nous sommes intéressés à comprendre le sens qu'ils étaient à même de donner à ces formulations.
La question des représentations écrites est souvent posée didactiquement comme celle du "passage au symbolisme".
Autrement dit, on veut signifier qu'après avoir manipulé des objets, on va pouvoir mettre sous une forme écrite les résultats de ces manipulations.
Ainsi, on conçoit cette mise en forme comme une simple association de signes ou de schémas à ce qui a été conçu par ailleurs dans la manipulation des objets. A ce niveau de réflexion le travail cognitif sur la représentation de l'écriture additive n'est pas reconnu comme nécessaire à la résolution; selon un raisonnement qui reviendrait à dire :
la manipulation a permis de bien concevoir l'opération, le langage n'est qu'une question d'association des signes conventionnels qui doit suivre "naturellement".
En effet, l'écriture est considérée comme une simple expression immédiate (sans médiation opératoire) de ce qui a été pensé : il ne semble donc pas y avoir d'intermédiaire entre ce que l'élève peut faire avec les objets et l'écriture ou le schéma qui lui sont fournis comme moyens de mettre directement en forme ce que la manipulation a pour but de faire émerger.
Il est bien entendu que pour nous l'écriture ou le schéma mobilisent toute une élaboration de nature cognitive, au même titre qu'elle implique ici la résolution d'une suite d'opérations (additives) sur les objets. On est ainsi en présence de "deux types" de résolutions successives et différenciées qui ne sont pas réductibles à une simple association entre les manipulations et les signes.
Il s'agit bien d'un processus de composition et de résolution qui porte sur un contenu arithmétique, mettant en oeuvre à la fois les systèmes symboliques et les inférences sémantiques de la situation - problème.
Comme le souligne J.P. Bronckart (1), "Toute opération langagière intègre de nombreux paramètres qui peuvent être organisés autour de quatre notions principales : La situation objective (les signifiés), le sujet parlant ..., le modèle langagier en vigueur dans le milieu ..., et les énoncés ..."

Ainsi, notre hypothèse considère qu'un travail cognitif est nécessaire à l'élaboration des représentations écrites (schémas, écritures conventionnelles..). Il n'y a pas donc simple association, mais une véritable reconstruction et conceptualisation des écritures.
Nous étendons au langage arithmétique ce que Galifret (1983) dit de manière générale : "L'utilisation du langage est certes proposée et suscitée par le milieu qui parle une certaine langue mais cette utilisation d'un matériel tout prêt exige tout de même une reconstruction appropriée, les mots ne jouant pas comme par magie".
C'est pourquoi, avec Laborde (1982) nous reconnaissons à la fois

- "la spécificité des problèmes d'explicitations des objets mathématiques"
- "mais aussi leur dépendance dialectique avec les problèmes de construction de ces objets".

En effet, nous considérons d'abord comme une exigence de s'assurer du degré de construction des objets mathématiques en tant que "signifiés" (en reprenant la terminologie de Vergnaud 1981) pour aborder l'usage du langage arithmétique (Kamii 1983).
Le problème à traiter est alors celui de la reconstruction sur le plan des "signifiants" : comment elle s'élabore, dans quels types de situation elle se manifeste, quelles sont les caractéristiques de son évolution dans le cadre de ces situations ?
Plusieurs travaux expérimentaux se sont intéressés à la compréhension des premières écritures d'addition et de soustraction sous forme d'équation (2) ainsi qu'au fonctionnement de la représentation symbolique sur ce contenu. Pour Vergnaud (1981), l'homorphisme entre la réalité et la représentation symbolique implique que la pensée fonctionne de façon différenciée puisqu'elle travaille à différents niveaux en même temps (éléments, classes, relations ... relations de relations) et à l'aide de différents systèmes symboliques à la fois (langage naturel, représentation imagée, schémas, espace ... etc.).

(1) Cité par C. Laborde (1982)

(2) Nous parlerons plutôt d'écriture équationnelle, car il ne s'agit pas véritablement d'équations.

Les recherches de Schubauer-Leoni et Perret-Clermont (1980,1984) mettent en évidence la complexité des rapports entre le niveau cognitif (selon les niveaux opératoires d'une épreuve piagétienne) et l'utilisation de l'écriture équationnelle. Il n'y a pas de dépendance directe, comme on aurait pu le croire. Les auteurs notent (1980): "Nous nous attendions à ce que plus l'enfant serait avancé sur le plan opératoire à une épreuve de composition additive du nombre, plus il serait susceptible de compléter correctement des égalités lacunaires de type

$$a + \ldots = c \text{ ou } a + b = \ldots$$

De même nous avions émis l'hypothèse que si les enfants ont achevé la construction opératoire de ces signifiés (sous forme de composition additive du nombre) ils auraient plus facilement recours au code équationnel enseigné à l'école.
Les résultats nous indiquent au contraire que le stade 3 à l'épreuve piagétienne choisie n'est ni une condition nécessaire ni une condition suffisante à la résolution des équations lacunaires proposées.
L'achèvement de la construction opératoire ne semble pas non plus une condition suffisante pour que l'élève recourt au formalisme mathématique lors d'un codage".
Ainsi, nous retiendrons d'abord le fait que le recours au code enseigné ne va pas de soi, même lorsque la construction cognitive d'une notion en jeu est achevée. Nous constatons, en 2e année primaire (7 - 8 ans) un faible pourcentage d'élèves qui utilisent d'eux-mêmes les écritures équationnelles (Schubauer-Leoni, Perret-Clermont, 1980 et 1983, Brun et Schubauer-Leoni, 1981). Par ailleurs, Conne (1979) s'attachant aux mécanismes cognitifs spécifiques aux tâches de lecture d'équations lacunaires à résoudre, a constaté que le code conventionnel est compris essentiellement comme un ordre du calcul (et non comme une mise en forme de relation) et le plus souvent à ces âges, sans que les signes (+, -, =) soient clairement différenciés, le calcul pouvant se faire à partir d'autres critères que les signes. Dans les tâches de production d'écritures équationnelles, si le recours au code reste faible, Schubauer-Leoni et Perret-Clermont ont pu montrer que des évolutions dans le sens d'une explicitation plus

complète et d'une composition meilleure des quantités en jeu se produisaient dans les situations d'interaction et de communication (1980; 1984).
A partir de ces observations, nous avons mis en oeuvre, dans le cadre d'une situation de communication un double processus écriture - lecture, en considérant l'écriture comme un "instrument" pour expliquer et justifier les opérations effectuées, et la lecture comme un moyen de vérifier et comprendre ces mêmes opérations.
Nous pensons rejoindre dans ce contexte ce que Brousseau (1978) nomme par dialectique de la formulation. En effet, face à un problème à résoudre, la fonction d'une écriture équationnelle est de préparer et justifier le calcul effectué par une mise en relation des données. Le processus de l'échange entre un écrivain et un lecteur dans le cadre d'une situation de communication permet un tel fonctionnement de ces écritures. Tel est le principe de la construction de notre situation expérimentale qui cherche à mettre en évidence le "comment" s'élaborent les écritures équationnelles.
La double exigence de la situation (vérification - justification) permet à la fois l'actualisation progressive de différentes procédures de symbolisation et la mise en oeuvre en commun d'un sens de l'écriture produite.

Les caractéristiques de la situation de communication sont les suivantes :

- le but de la communication est pour les interlocuteurs, de se mettre d'accord sur une formulation écrite qui rende compte des opérations effectuées dans le cadre d'un jeu de dés.
  L'écrivain doit la rendre intelligible à un lecteur qui devra la comprendre, et pour cela demander d'éventuelles explications à l'écrivain qui à son tour doit alors justifier son message.
  Ainsi s'articulent les relances et les arguments afin d'expliciter l'écriture produite.
- La durée des échanges, elle n'est pas limitée, mais elle est organisée autour de trois temps.
  Au terme du 3eme échange, la situation est modifiée par l'introduction de cartes sur lesquelles sont imprimés des symboles arithmétiques.
- Le rôle de l'expérimentateur est de mobiliser les relances du jeu dans le but de susciter la justification de l'écrivain et la vérification du lecteur.

A ce titre, l'expérimentateur fait partie intégrante des protagonistes du jeu, selon les modalités liées à son rôle. Dans ses interventions pour relancer le jeu, il se limite à réintroduire les caractéristiques du jeu : la consigne, les règles du jeu, les propriétés du matériel.
En revanche, il n'intervient pas à propos des caractéristiques du symbolisme puisque notre objet d'étude est de comprendre comment les élèves élaborent les écritures arithmétiques et plus précisément quel sens ils donnent aux écritures équationnelles. Le rôle de lecteur (marchand) peut être interprété à première vue comme un simple décodeur de messages; mais son rôle est essentiel dans le dispositif des échanges (comme nous allons le voir plus loin) : il est chargé de comprendre et de valider les écritures et contribuer à reformuler les messages. Dans ses interactions verbales avec l'écrivain et l'animateur, le lecteur cherche des stratégies de résolutions à partir desquelles aussi il argumentera auprès de l'écrivain qui devra reformuler son message.

2. Méthodologie de la recherche

Cette recherche a été menée auprès des élèves de 3ème primaire de l'école genevoise (8 et 9 ans). Nous avons donc constitué des mises en scène dans un jeu d'échanges entre trois protagonistes : deux enfants, le joueur de dés (et écrivain), l'autre, marchand de bonbons (lecteur de message) et enfin l'animateur du jeu (faisant partie intégrante du jeu) (1).
Il faut distinguer quatre moments dans les différentes communications écrites et les interactions verbales c'est-à-dire qu'au temps 1 les enfants écrivains formulent à destination des enfants marchands leur première composition, ensuite ils reformulent deux fois leur composition (au temps 2 et 3); et enfin si les protagonistes n'aboutissent pas à un accord relatif à ces différentes productions écrites, alors nous leur proposons un jeu de cartes comportant un langage arithmétique (au temps 4) pour observer la "Pertinence" de ce registre dans la résolution.
Préalablement à l'épreuve expérimentale, nous avons procédé à une passation d'une épreuve préliminaire, afin d'attribuer aux élèves le rôle de marchand de bonbons ou joueur de dés. L'épreuve à été constituée de trois problèmes additifs sur les jeux de billes (tirée des recherches de G. Vergnaud) (2).

(1) Avant d'aborder le sondage auprès des enfants de 3ème primaire, nous avons auparavant effectué ce même sondage auprès des élèves de 2ème primaire, ces derniers ont eu passablement de difficultés à assumer et à comprendre les différents rôles et règles du jeu, dans la situation d'échange de cette nature.

(2) Il s'agit des problèmes suivants :

Pierre à 6 billes

Il joue une partie et il perd 4 billes

- combien de billes a-t-il après la partie ?

Paul joue deux parties de billes

A la première partie, il gagne 6 billes

A la deuxième partie , il perd 4 billes

- Que s'est-il passé en tout ?

Patricia joue trois parties de billes

A la première, elle gagne 2 billes

A la deuxième. elle gagne 6 billes

A la troisième, elle perd 3 billes

- Que s'est-il passé en tout ?

La consigne suivante à été donnée oralement aux enfants avant la composition écrite : "On va faire un petit problème de calcul; l'enfant prend connaissance de l'énoncé du problème.
Ensuite on propose à l'enfant une feuille de papier et un crayon on lui dit : "Tu peux marquer sur cette feuille comment tu as fait ton calcul"; s'il y a des hésitations dans la composition de la part de l'enfant, on pose la question suivante : "Que s'est-il passé en tout avec perdre et gagner".

Il faut noter que cette passation est individuelle. Ces trois problèmes nous ont permis donc de classer les deux groupes d'élèves marchands et joueurs de dés de la façon suivante : les élèves qui ont formulé ces problèmes en une notation conventionnelle du type a-b=x ou a+b-c=x constituent alors le groupe des marchands (lecteur des messages émis par les joueurs de dés); et les élèves qui ont formulé, en outre, ces problèmes en une notation non conventionnelle, par des compositions écrites approximatives : en langage naturel (gagné, perdu ...) ou bien des dessins, schémas et enfin en langage arithmétique partiel; ces élèves constituent le deuxième groupe des joueurs de dés (écrivains).
Il faut souligner qu'entre la passation préliminaire et l'épreuve expérimentale proprement dite, nous laissons s'écouler un temps de deux à trois semaines, de manière que le "prétest" n'influence pas l'épreuve directement.
Notons, en outre que cette catégorisation des deux groupes d'enfants a été faite essentiellement pour favoriser la confrontation sur la nature de la formulation écrite, étant donné les procédures de symbolisation utilisées par les protagonistes à l'épreuve préliminaire; il semble donc important pour le choix du marchand, que les références de notations soient les plus explicites possibles, témoignant d'une compréhension des exigences cognitives du problème.

2.1. Le déroulement de l'épreuve

Le dispositif du jeu de communication entre les deux protagonistes (marchand de bonbons, joueur de dés) et l'expérimentateur est le suivant :
nous mettons à la disposition du marchand une boîte de bonbons, et à celle du joueur de dés trois dés de couleur différentes (deux vert et 1 blanc) plus une feuille de papier et un crayon.

Les deux élèves impliqués dans le jeu (marchand et joueur de dés) sont séparés par un écran, dispositif qui permet au marchand de prendre en compte seulement des formulations écrites du joueur de dés, obligeant ainsi celui-ci à composer par écrit ses productions.
Cependant avant la mise en place de "l'écran", nous procédons à une longue explication des règles du jeu, préalable à l'épreuve, en faisant jouer les deux élèves pour prendre connaissance du contenu du jeu d'une part et d'autre part en simulant l'importance du rôle et du statut de chacun dans le jeu. Cette phase de simulation du jeu avant l'épreuve a deux buts : le premier est celui d'impliquer l'écrivain et le lecteur dans la situation en fonction du statut de chacun; le deuxième est celui de permettre aux deux élèves d'identifier les règles du jeu en fonction de leur statut.
Rappelons que l'animateur a un statut de protagoniste dans le jeu, et ceci par ses différentes interventions dans les relances du jeu.

2.2. Consigne :

En effet, avant de commencer l'épreuve proprement dite, l'expérimentateur invite les deux élèves à être attentifs par le fait que la consigne s'adresse aux deux (marchand et joueur) et non pas seulement à l'écrivain du message; la consigne donnée est la suivante : "On va jouer au marchand de bonbons et au joueur de dés. On joue avec les trois dés pour gagner des bonbons:avec les dés verts on gagne des bonbons et le dé blanc nous fait perdre des bonbons. Pour que le marchand te donne les bonbons (à l'adresse du joueur de dés), tu dois lui marquer sur cette feuille ce que tu as gagné avec les dés. Le marchand doit bien comprendre tous les bonbons que tu as obtenus avec les trois dés et combien de bonbons tu as gagné en tout, pour qu'il puisse retrouver ton résultat et te donner les bonbons, sinon le marchand ne peut pas te donner les bonbons (1).
S'il y a incompréhension ou hésitation devant le message reçu, ce qui est souvent le cas, de la part du marchand, l'expérimentateur relance le jeu en complétant la consigne : "Peux-tu lui expliquer pourquoi tu ne comprends pas ce qu'il t'a marqué" (le joueur de dés).

(1) Toutes les séances étaient enregistrées, plus prise de protocole pour chaque séance.

La consigne a été formulée dans le but d'une explicitation des différentes étapes de la résolution de l'équation additive.
Il faut rappeler à ce niveau que le joueur/écrivain peut communiquer trois fois sa production à l'aide d'un message, pouvant ainsi reformuler sa composition deux fois, si nécessaire, à destination du marchand.

Ainsi cette deuxième partie de consigne invite le marchand à expliciter le pourquoi de son incompréhension devant l'écriture émise par le joueur entre les deux protagonistes, menant l'écrivain à reformuler sa composition.
Par ailleurs lorsque les 2 interlocuteurs ne parviennent pas au temps 3 à formuler un langage on lui propose de reformuler alors avec un jeu de cartes allant de 0 à 9 et les signes suivants : +, -, =.
Autrement dit, nous lui fournissons un code inférant au registre arithmétique pour effectuer son opération; la question suivante est posée à l'enfant "Peux-tu lui demander les bonbons avec ces cartes?".
Au cours des relances du jeu l'expérimentateur répète la consigne pour rappeler le problème; ce "rappel" de la consigne permet de mieux gérer le jeu.
En effet, la simulation sociale des rôles dans les échanges est rencontrée quotidiennement par les enfants : entre vendeur et acheteur, entre marchand et client, etc...; elle est souvent l'habillage des activités scolaires.
Autrement dit, on simule les rôles en insistant bien sur la "responsabilité sociale" des rôles attribués, par exemple : "un marchand doit faire très attention à ses bonbons et ne doit pas les donner, s'il ne comprend pas très bien ce qu'on lui demande avec le message (l'enjeu est ramené à la production écrite). Nous insistons ainsi sur le rôle vérificateur du marchand.
Or dans ce contexte, le joueur de dés est amené à justifier sa production écrite; les arguments avancés dans les différentes interactions verbales peuvent être repris par l'expérimentateur dans le but de relancer le jeu et la reformulation écrite.

3. <u>Les contenus des interactions dans le déroulement des épreuves</u> :

Nous abordons à présent, lesdifférents contenus d'échanges recueillis auprès des interlocuteurs du jeu, tirés des protocoles de séances. Il faut préciser que ces contenus des échanges nous permettent de suivre les différentes formations du processus de la relance mettant en jeu le statut des productions écrites des enfants écrivains et les arguments du lecteur. C'est donc à travers les arguments et contre les arguments conflictuels que s'élaborent les reformulations des écritures. En outre ces contenus nous permettent une lecture à la fois des différentes modifications intervenues dans les compositions et des modifications des représentations symboliques des enfants.

****

Afin d'alléger la lecture de ces comptes-rendus (protocoles), nous avons procédé à une série d'abréviations : marchand (M), joueur de dés (J), expérimentateur (E), les dés verts (V), le dé blanc (B); ensuite les différents temps des échanges T1, T2, T3 et T4. Et enfin, nous présentons les contenus des productions des élèves dans l'ordre temporel des échanges.

****

PAULI (J), JOSE (M), E

T1

Pauli (J) obtient 5,4 V et 3 B
1ère notation

$$\cancel{5}\ \cancel{4}\ \cancel{3} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ -3 \\ \hline 6 \end{array}$$

Pauli dit alors "Je fais le calcul" en direction de l'E.

E tu fais ce que tu penses bien. Il formule en deux fois son message et il remet au Marchand.
José (M) dit : il a mis 5 plus 4 moins 3, 5 plus 4 ça fait 9 moins 3 ça fait 6. M est satisfait de la notation.
E pourquoi as-tu hésité pour cela (la première production)
Pauli (J) pour le trait (égal).

SYL (J), MATH (M), E

T1

Syl. obtient 4,5 V et 6 B
1ère notation :

3

Elle dit à haute voix : Je marque le résultat

E tu marques ce que tu penses bien
Math (M) intervient : oui, mais elle doit marquer le résultat.
Syl (J) réfléchit un petit moment et note 3 sur le message. Elle le transmet au M pour lui demander les bonbons.
Math (M) dit non, mais je crois savoir ?
E tu peux lui expliquer pourquoi tu ne comprends pas ?
Math (M), comment on peut savoir, si je trouve tout d'un coup 5 et 1...
E tu peux retrouver le dé blanc ?
Syl (J) répond 3
Math (M), c'est quoi celui là (à propos du 3 sur la feuille); elle poursuit trois dés ou trois points parce qu'il y a plusieurs points sur un dé : 5 ou 2, ou 3 ...

T2

Syl (J) dit mais, il faut que je marque les dés....
il faut que j'y écrive :
2ème notation :

$$5 + 4 - 6 = 3$$

Syl (J) note alors 5 + 4 - 6 = 3 en indiquant à Math le dé blanc : il est lié (en le montrant du doigt)
Math (M) oui, c'était le 3 ... (c'est-à-dire le résultat, c'est bien juste).

ELENA (J), KARIN (M), E

T1

Elena (J) obtient 6,4 V et 2 B
1ère notation

Elle marque pour Karin sur son message 10-2=8

$$10 - 2 = 8$$

Karin (M), sans hésitation, dit ça va, j'ai compris
E dans le but d'une reformulation plus explicite des quantités en jeu, pose la question "est-ce qu'on peut avoir 10 points sur un dé ?"
Karin (M) non ...
Karin (M) poursuit "on peut avoir 5 et 5 par exemple :
l'E tu peux lui expliquer pourquoi tu ne comprends pas
Karin (M) dit alors, parce que sur un dé on peut pas avoir 10...
Elena (J) ah oui ?

T2

2ème notation :

$$6 | 4 - 2 = 8$$

Elena (J) recompose son message et note 6/4-2=8... en explicitant bien les deux quantités gagnantes et les séparant par un trait; pour dire il y a 6 et 4 et étant bien entendu l'équivalent du signe (+). Elle dit en même temps à Karin "Ca 6 et 4"; c'est séparé pour signifier qu'il y a deux quantités,

./.

(Suite Elena (J), Karin (M), E

E tu peux lui donner les bonbons comment ça
Karin (M) là 6, 4, c'est séparé avant, oui
E même avec le trait
Karin (J) ah oui bien sûr !
E on ne peut faire encore autrement
Karin (M) si non elle peut mettre 1 carré sur les dés (c'est-à-dire représenter la figure d'un carré pour chaque dé...)

JES (J), LILI (M), E

T1

Jes (J) obtient 2,5 V et 4 B
1ère notation :

Elle dit : on marque ce qu'on gagne.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 5 \\ -4 \\ \hline 3 \end{array}$$

E répète la consigne
Jes (J) : on marque tout et après on marque tout le résultat. Elle veut s'assurer auprès de E. que son traitement est juste, on marque toutes les quantités obtenues et ensuite on fait le résultat.
Jes (J) note sur son message pour Lili en composant une addition en colonne.
Lili (M) fait une première lecture du message et hésite passablement sur la notation;
E tu comprends qu'elle t'a marquée ?
Lili (M) non.
E tu peux lui expliquer pourquoi tu ne comprends pas ?
Lili (M) pace qu'ici elle a moins, 5 moins 4...2 moins 5 ça fait 3 et moins 4 ?
E elle ne comprend pas parce que 2 moins 5 ça fait 3. Or ce qui fait problème pour le marchand, c'est bien l'absence du signe + dans l'opération.
Jes (J) dit alors : ça c'est les dés verts (2,5) et l'autre (3) c'est le blanc.
E oui, il y a un dé qui gagne, l'autre qui gagne et l'autre qui perd ?

T2

2ème notation :

$$\begin{array}{r} 2 \\ +5 \\ -4 \\ \hline 3 \end{array}$$

Jes (J) recompose son message en disant "je refais le calcul
Lili (M) dit après une deuxième lecture du message, ici (pour les quantités gagnantes) 2,5 c'est les dés qui gagnent; le
Jes (J) reformule oralement sa composition "là (2,5) sont les dés qui gagnent et là (4) c'est le dé qui perd...
E est-ce que tu peux lui donner les bonbons maintenant.
Lili (M) oui.

FLO (J), RACH (M), E

T1

Flo (J) obtient 6,3 V et 3 B
1ère notation :

$$6 \times 3 = 9 - 3 = 6$$

Elle décompose l'équation en deux gains et puis la perte en faisant une erreur sur le signe (+) des gains le remplaçant par le signe de multiplication (X) tout en opérant une addition correcte : 6 x 3 = 9...)

Rach (M) "je dois lui donner 6 bonbons parce qu'elle en a 9 et elle enlève 3..."
E rend attentif le marchand : "tu regardes (tu lis) bien ce qu'elle t'a marqué"
Rach (M) "Je me suis trompé, c'est "plus", elle a marqué "6x3" et c'est "6+3"..."
Le jeu est ainsi relancé
E en direction de Flo (J) : "tu peux peut-être recommencer une autre fois"

./.

$$6+3=9-3=6$$

T2

Flo (J) "ah oui" elle marque et remet ensuite le message à Rach
Rach (M) "6 bonbons je dois lui donner
E "c'est juste maintenant?"
Rach (M) "oui"

CED (J), SEV (J), E

T1

Ced (J) obtient 4,3 V et 4 B
1ère notation :

$$7-4=3$$

Ced (J) dit préalablement "Je dois écrire le calcul"

Sev (M) hésite à la réception du message, elle regarde E; elle dit, il faut regarder si c'est juste
E lui rappelle son rôle dans le jeu (le M doit comprendre ce qui est marqué sur billet ... vérifier...).
E pose la question "il y a combien de dés dans le jeu"
Sev (M) réponse de M 3.
E est-ce que tu peux savoir combien de points il y a sur chaque dé ?
Sev (M) dit "il y en a 2 (c'est-à-dire deux dés verts) ça peut fait 5 et puis 2 ... ou 7 ça peut être un tombé sur 5 et l'autre sur 2 ou 6 et 1, il y a beaucoup de difficultés.
E on peut avoir un dé avec 7 points ?
Ced (J) ah oui ?

T2

2ème notation : $3+4-4=3$

Ced (J), à ce moment là, il reformule sa composition en explicitant l'ensemble des quantités en jeu dans l'opération 3 + 4 - 4 = 3 et puis
Sev (M) dit, oui parce qu'il y a un dé vert qui a 4 et l'autre 3 et l'autre (pour le dé blanc) 4.

LISA (J), CHRIS (M), E

T1

Lisa (J) obtient 1,2 V et 1 B
1ère notation :

3-1=2

Elle note sur son message pour Chris (M)
3 - 1 = 2

Chris (M), après lecture, hésite de donner les bonbons...
E pose la question : il y a combien de dés dans le jeu.
Chris (M) 3.
E Où sont-ils (dans le message).
Chris (M) celui-là il perd (1)
E les dés qui gagnent ils sont où ?
Chris (M) on peut pas avoir elle doit (en direction Lisa) refaire 3 en vert (les 3 points) et le blanc : 1.
E tu peux lui expliquer ce qu'il faudrait faire :
Chris (M), j'ai trouvé elle fait par exemple 4+5=9 et puis après -2, ça fait 7.
Lisa dit "oui, mais y a 3 dés
Chris (M) le résultat, c'est pas un dé ?
E répète la consigne pour resituer le problème.
Chris (M) lui indique bien un traitement possible et lui explique qu'il ne faut pas confondre les points des dés et le nombre de dés.

T2

2ème notation :

un des vert a le numero 2 et lautre a le numero 1 le blanc a le numero 1

Lisa (J) recompose son message et note (en langage naturel : "un dé vert a le numéro 1 le blanc a la numéro 1". Cet énoncé complémentaire à la première production lui permet d'expliciter l'ensemble des quantités en jeu.
Chris (M) dit après lecture : je comprends ce que je dois lui donner, mais je ne sais pas où ils y sont les 3 dés (dans l'équation); il poursuit les 2 dés verts c'est + et le dé blanc c'est -. Il est donc satisfait de cette nouvelle notation.

FRANCISCI (J), FRAN (M), E

T1

Francisci (J) obtient 1,5 V et 1 B
1ère notation :

Il dit : Je marque comment le + et le - ?

$$6-1=5$$

E oui, il note alors au M 6 - 1 = 5.
Fran (M) après lecture du message.
E tu comprends ?
Fran (M) oui, parce qu'il y avait plusieurs solutions sur un dé vert 4 sur l'autre 3...
E oui, On peut savoir où ils sont les dés verts ?
Fran(M) parce qu'il y a plusieurs possibilités sur les dés verts... Je ne sais pas comment il y fait ?
E où ça va pas ?
Fran (M) montre le 6. Réponse de Fran. : Je ne comprends pas.
E Il y a des points sur chaque dé vert.
Francisci (J), a ce moment là il refait son message.

T2

2ème notation :

$$5 \times 1$$
$$\cancel{5+1=2}$$
$$5+1=6-1=5$$

Francisci (J) remarque 5 x 1 et 5 + 1 = 2, et enfin 5 + 1 = 6 - 1 = 5
Fran (M) relit le message et il dit oui
E ça va comme ça... oui Franc (M)

CHRIS (J), SAND (M), E

T1

Chris (J) obtient 6,5 V et 3 B
1ère notation :

Il dit : Je marque le résultat

$$8$$

(suite Chris (J), Sand (M), E)

E. répète la consigne
Sand (M) dit, tout de suite, je ne peux pas lui donner (les bonbons) :
E parce que tu ne comprends pas ce qu'il t'a marqué
Sand (M) oui,
E Est-ce qu'on peut savoir ce qu'il y gagné et ce qu'il a perdu avec les trois dés

Réponse de Sand (M) :

Sand (M) , je ne sais pas comment, elle a pu faire 6 et 6 avec les deux dés verts et puis -4, ça fait 8.
E dit à Chris : elle ne peut pas savoir ce qu'il y a comme points sur les trois dés...Peux-tu refaire. Chris : j'ai compris.

T2

2ème notation : $6 + 5 = 11 - 11 - 3 = 8$

Chris (J) reformule : 6+5=11 11-3=8
Sand (M) j'ai essayé de faire son calcul, mais c'est faux 6+5 ça fait 11 et 11-3=7... un après, il se reprend ... ah ça fait 8. Je peux lui donner les bonbons.

MARIA (J), JOSE (M), E

T1

Maria (J) obtient 3,3 V et 5 B
1ère notation :

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ 6 \\ \hline 11 \end{array}$$

Elle dit : il faut qu'on marque les trois (les trois dés) sur la feuille

E rappelle encore la consigne
Maria (J) note 3 pour José une addition en colonne; elle dit en même temps : on n'a qu'à faire le calcul.
José (M) je ne sais pas lequel c'est le blanc;
E il fait quoi, le dé blanc (dans le jeu) tu peux lui dire;
José (M), il enlève les points (il poursuit) Je sais pas où est le dé blanc.
Maria (J) dit à oui... (sous-entendu j'ai compris).

./.

T2

2ème notation

$$\begin{array}{r} 3 \\ -\ 2 \\ 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

Maria (J) refait son message
José (M) Après lecture du message José (M) dit :
c'est celui-là (6) le blanc, oui, c'est juste...
E rend attentif le M : regarde bien, tu peux lui donner 0 ?
José (M) je lui donne 0 bonbon... et puis non !
E tu peux lui expliquer ; pourquoi tu ne comprends pas,
José (M) : je peux pas t'en donner là 2+3 ça fait 5 et le blanc c'est 6.
Maria (J) dit : j'avais 11, j'avais 6 avant j'ai mis 3 et j'ai mis 2 parce que j'ai enlevé 1 au 3....(ou Marie travaille sur les quantités obtenues dans la phase d'explication de la règle du jeu (c'est-à-dire 3,2 V et 1 B).

T3

3ème notation :

$$\begin{array}{r} 3 \\ -\ 3 \\ 5 \\ \hline 1 \end{array}$$

Maria (J) reformule pour une deuxième fois son message et elle dit ça fait 11, en hésitant de marquer; après elle note $\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ \underline{5} \end{array}$ et le transmet à José.

José (M) hésite aussi.
E lui demande : ils sont où les dés qui gagnent et le dé qui perd ?
José (M) les deux dés verts on gagne et le blanc il enlève (des points).
E il en reste combien en tout
Maria (J) "il en reste 3".
E Peux-tu lui expliquer pourquoi tu ne comprends pas ?
José (M) : les dés verts ils gagnent des bonbons et le dé blanc il enlève (perdre) ;

(suite Maria (J), José (M), E)

E pose la question, avec les dés verts tu gagnes quoi ?
Maria (J) 6 bonbons, et le blanc, 5.
E poursuit, alors tu en as gagné 6 et perdu 5, et en tout ?
A ce moment là Marie reprend son message et apporte une modification importante et composant sous l'effet des différentes interactions verbales : 3
Maria (J) ajoute à la - 3 disposition en colonne le signe moins
et compose 5
—
1

José (M) dit alors je dois lui donner qu'un bonbon.

SAND (J), THER (M), E

T1

Sand (J) obtient 4,6 V et 6 B
1ère notation :

10 - 6 =4

Elle note sur son message
10-6=4 pour le Marchand

Thér. (M) dit, alors 4 et hésite un peu ;
E du peux lui donner avec ça les bonbons, tu réfléchis bien ?
Après un long moment Thér. (M) ne donne pas de réponse) .
E il y a combien de dés dans le jeu ?
Thér (M) 3.
E Est-ce qu'on peut savoir où ils sont là-dessus (sur la notation 10 - 6 = 4);
Ther (M) oui deux dés qui peuvent faire 10 et 6...
E , avec un dé on peut faire 10;
Thér.(M) réponse, non, elle poursuit 10 peut-être 5 plus ou 4 plus 6.
E Tu peux lui expliquer pourquoi tu ne comprends pas ?"
Thér : Je ne sais pas combien les dés verts ils ont tirés ?

T2

2ème notation : vert 6 vert 4
blanc-6

Sand (J) dit : je marque ce qu'ils ont fait (sous-entendu les deux dés verts)

./.

(suite Sand (J), Ther (M), E)

Elle écrit : vert 6, vert 4 et blanc d - 6.
Thér. (M) maintenant je peux lui donner 4 bonbons.
E tu penses qu'on peut faire autrement (en direction des deux protagonistes);
Thér (M), oui, mais c'est juste 10-6=4

JEAN (J), DAVID (M), E

T1

Jean obtient 6,6 V et 4 B
1ère notation :

12-4=8

Il dit : Je peux marquer par exemple j'avais avant 7 moins 3 (dans les préalables du jeu)
Il annonce sa procédure de résolution.

E tu marques comme tu penses.
Jean (J) note alors pour David 12-4=8.
Petite hésitation à la réception du message de la part de David (M)
E lui demande "est-ce que tu comprends ce qu'il t'a marqué;
David (M) réponse, non.
E Qu'est-ce que tu ne comprends pas ?
David (M) Parce que 12 on peut pas les avoir sur un dé;
Jean (J) lui répond, mais je l'ai compté avec les deux (sous-entendu les deux dés verts)

T2

2ème notation : j'ai compter avec les deux der

Jean (J) reformule son message pour le M pour mieux lui faire comprendre il écrit en langage naturel : "J'ai compter avec les deux dés". Comme pour souligner ou renforcer l'argument et la justesse de sa première production *(suite Jean (J), David (M), E)*

David (M) hésite beaucoup devant cette nouvelle notation :
E tu as combien de dés pour gagner ; Jean 2,
E qu'est-ce que tu as gagné ?
Jean (J) 12.
E "est-ce que tu peux gagner 12 ?"
Jean (J) non, mais j'ai compté avec les 2 (dés).
E tu lui marques, il ne les voit pas dans le jeu.

T3

3ème notation : $6+6-4=8$

Jean (J) reformule encore une fois.
Après lecture David lui dit
David (M) comment ça, ça va.
E pourquoi ça va ?
David (M), parce que là il avait marqué les 12 avec les deux dés et maintenant il a fait avec les deux dés dans des verts et après avec le blanc il a fait 4. Alors 12 moins ça fait 8.

LAU (J), MAD (M), E

T1

Lau (J) obtient 6,3 V et 2 B
1ère notation :

Elle écrit sur son message pour Mad (M) en langage naturel.

En tout je doit avoir 11 bonbons mais comme je doit en enlever 2 points il m'en peut moins

E demande à Mad (M), peux-tu lui donner les bonbons avec ça (avec cette notation);
Mad (M), non
E pourquoi tu ne peux pas lui donner ?
Mad (M), un moment de silence, non je ne peux pas lui donner;
E explique- lui pourquoi tu ne comprends pas
Mad (M), tiens, il y a deux dés verts qui gagnent et un dé blanc qui perd (à l'adresse de Lau.)
E tu peux lui marquer ce que tu as eu sur les dés :
Lau (J) mais 11...
E on peut avoir 11 points sur un dé;
Lau (J) non il y a trois dés... y a deux dés verts ?
(reprise de la consigne) ./.

(suite Lau (J), Mad (M), E)

<u>T2</u>

2ème notation

Aavec les trois dé jai obtenu ~~11~~ le ~~m~~ nombre 11 mais comme je doit en enlever 2 bonbon. sur un dé vert j'ai obtenu 6 et sur l'autre dé vert j'ai eu 3 il ment faut 9.

Lau (J) recompose, à l'intention de Mad (M) le message au-dessus.
Mad (M) dit : je ne comprends pas "J'ai obtenu 11", mais sur un dé vert 2...".
E, tu peux lui expliquer pourquoi tu ne comprends pas.
Mad (M), oui, elle doit mettre sur les dés verts les nombres qu'elle a eu et sur le dé blanc ce qu'elle a eu; comme ça je peux lui donner.
Alors 6 et 3 ça fait 9 alors je lui donne 9 ?

<u>T3</u>

3ème notation :

Sur le dé blanc j'ai 2
Sur un dé vert j'ai 6 et sur l'autre dé vert j'ai 3.

E reprend une partie de la consigne : on gagne avec les 2 dés verts et le dé blanc nous fait perdre, les 3 dés comptent dans le jeu.
Lau (J) prend en compte l'explication du M et il écrit le message au-dessus.
A ce moment là,
E demande à Mad (M), c'est toi qui calcule... réponse, alors 6 et 3 ça fait 9, alors je lui donne 9 et puis qui il en a un qui perd.

./.

(suite Lau (J), Mad (M), E)

T4

Les cartes

E propose le jeu de cartes : tu peux faire le calcul avec ces cartes;
Lau (J) ah oui;
Lau. note 6+3-2=9
Mad (M) je lui donne 9 bonbons.
Lau (J) : "J'ai obtenu 11 ou je dois avoir 11 "ensuite" il me faut ou m'en faut..." elle additionne l'ensemble des quantités obtenues et déduit 2 de 11, comme pour rien oublier des quantités de départ (procédure déjà rencontrée chez les élèves de cet âge); or, elle annule simplement sa perte des trois gains (11-2=9). Cependant, cette production articulée en langage naturel résiste tout au long de la passation de l'épreuve. Ce qui peut attribuer à la pertinence de la représentation verbale qui infère au registre des énoncés, donnant lieu à l'explication de l'ensemble des actions...

MATA (J), CHRIS (M), E

T1

Mata obtient 4,1 V et 3 B
1ère notation :

je voudrais 2 bonbons

Elle marque sur son message pour Chris (M)

Mata (J) opère implicitement et demande à Chris (M) : peux-tu savoir combien il y a de points sur chaque dé avec ça (message);
Chris (M) dit : si par exemple sur les deux dés y a 3 ça fait 6 sur le dé blanc, ça fait 4 points ...
E tu peux lui expliquer pourquoi tu ne comprends pas ?
Chris (J) à Mata, "les deux dés verts par exemple, y en avait 3 sur chaque dé vert, ou enlève 4 avec le dé blanc... elle aurait dû marquer, j'ai gagné 6 et perdu 4 avec le dé blanc
E répète la consigne.
Mata (J) je marque ce que j'obtiens avec les deux dés et j'enlève avec le dé blanc.

./.

(suite Lau (J), Mad (M), E)

T2

2ème notation

j'ai 8 bonbons j'en ai perdu 3 il me reste 2 bonbons

Mata (J) reformule son message pour Chris ci-dessus,
Chris (M) ne répond pas :
E on peut maintenant savoir combien y a de points sur chaque dé ?
Chris (M) non, parce que peut-être qu'il y a sur un dé 6 et sur l'autre 2.
E peut-être, mais c'est pas là-dessus (c'est-à-dire le message) tu peux lui expliquer pourquoi tu ne comprends pas.
Chris (M) : elle pourrait marquer sur chque dé tel ou tel chiffre j'en ai perdu 3 et marque le résultat.
Mata (J) dit : elle veut que je marque sur un dé y a 4 ;
Chris (M) je veux que tu marques le chiffre des dés ce que tu as gagné et perdu.
E reprend la consigne.

T3

3ème notation

sur un dé vert j'ai eux le chiffre 4 et sur l'autre dé vert j'ai eux le chiffre 1 et sur le dé blanc j'ai eux le chiffre 3 j'ai gagné 8 bonbons et j'ai perdu 3 bonbons total 5

Mata (J) marque pour le troisième échange pour Chris le message ci-dessus.
Chris (M) : je comprends parcequ'elle a marqué le chiffre sur les deux dés verts et qu'elle a perdu et en font les verts, combien elle en a perdu et total.
E: elle a 8 avec les verts,
Chris (M) : non ?

T4

Les cartes

E Tu peux faire avec ça et lui demander les bonbons...
Mata (J), je comprends pas ?

./.

(suite Mata (J), Chris (M), E)

E tu fais un calcul avec ces chiffres...
Chris (M) aussi avec le nombre de dé.
Mata (J) compose 4+1-3=2 ;
E tu peux lui donner maintenant,
Chris (M) oui on fait 5-3...

Hélè (J), Fran (M), E

T1

Hélè (J) obtient 4,3 V et 4 B
1ère notation :

p4 b3

Elle formule à destination de Fran (M) dans son message p 4 b3.

Hélè (M) signifie qu'elle a perdu (P) 4 bonbons et qu'elle a gagné en tout 5 bonbons et ayant ainsi composé l'ensemble des quantités en jeu dans l'opération. Elle dit, oralement "j'ai perdu 4 bonbons...".
Fran (M) : trois dis... en tout résultat ?
E est-ce que tu as compris;
Fran (M) non pas tellement...
E tu peux dire pourquoi ?
Fran (M) là peut-être, elle a perdu 4 bonbons, mais alors là : pour 3b, je ne sais pas ce que c'est ?
E tu peux lui expliquer pourquoi tu ne comprends pas ?
Fran (M), il y avait les deux dés verts, on gagne (avec) des bonbons et avec le dé blanc on perd des bonbons.
E et en tout, ce qu'elle a gagné;
E resouligne ce que Fran a annoncé : il y a deux dés qui gagnent et un qui perd... et tout perdre et gagner.

T2

2ème notation :   p.4 ~~b~~ g.3

Hélè (J) reformule son message et note : p4   ~~b~~   g3
3
Hélè (J) arrange en disposant les quantités (des gains et de la perte) en signifiant bien par lettre comme support à la compréhension du récepteur.
E il est où ton résultat, devant l'hésitation du M; Hélè (J) il est là en indiquant le 3 du   isolé.
Fran (M) : en tout elle avait 7 et 3;
E il y a combien de dés dans le jeu ?

./.

(suite Hélè (J), Fran (M), E)

Hélè (J) dit eh.... maintenant j'ai compris
Fran (M) réplique en disant : là, peut-être, perdu 4 bonbons, gagne 3 bonbons, mais là le 3 je sais pas.
Hélè (J) dit, j'ai oublié de marquer quelque chose.
E les points des dés verts et du dé blanc où sont-ils ?
Fran (M) renforce cet argument : Peut-être le 4 c'est le blanc perdu et ça (3) gagné.
E enchaîne pour rappeler la consigne : Il y a 2 dés qui gagnent et un dé qui perd, et puis en tout..."

T3

3ème notation :

3
p.4.g3   p4 g$\overset{4}{\cancel{7}}$ g3

7 4   g7 p4

Hélè (J) reformule, pour la deuxième fois, son message pour Frank (M) il faut souligner cette constante du résultat d'une opération dans sa formulation (par position spaciale, et avec le support du langage naturel p et g) c'est le 3 g, ce qui signifie bien sa composition implicite (de 4 + 3 - 4 = 3) et qu'elle a des difficultés à expliciter dans la composition écrite.
E, est-ce qu'on peut avoir sur un dé 7 points ?
Hélè (J) oui.
Fran (M) dit : non : 6
Hélè (J) dit alors, non !
Fran (M) relance le jeu en disant "si tu as gagné 4 et perdu 3 ça fait 7 mais ce 4 ;
Hélè (J) renote sans même qu'elle soit sollicitée dans cette deuxième production ci-dessus, et elle dit maintenant je marque tout : dans le but d'expliciter l'ensemble des quantités en jeu.
Fran (M) tu as gagné 4 et 3 ça fait 7 moins 4 ça fait 3,
Fran (M) formule l'ensemble de composition à sa place pour lui signifier la démarche procédurale...

T4

Les cartes

E lui propose alors le jeu des cartes qui peut lui inférer largement au registre de l'écriture scolaire et la représentation symbolique de cette dernière.

./.

(suite Hélè (J), Fran (M), E)

Hélè (J) commence par faire :

4
3 4
3 4 4 E, il te manque quelque chose ?
beaucoup d'hésitation : 4 -
- 4 3+4 J'ai gagné

Elle poursuit "ça fait 7
- 4 3 + 7
= 7

Autrement dit elle formule partiellement son équation alors qu'elle avait implicitement composé à sa première production. La procédure de la disparition spaciale résiste jusqu'à la fin du jeu.

<u>XAV (J), MARIE (M), E</u>

<u>T1</u>

Xav (J) obtient 5,3 V et 5 B
1ère notation :

$$\cancel{3} \quad \begin{array}{r} 5 \\ -5 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ +0 \\ \hline 3 \end{array}$$

Il dit à haute voix : j'ai gagné 3 bonbons; il opère implicitement en donnant le résultat

E rappelle la consigne.
Xav (J) fait des additions en colonne ensuite il barre le 3 et l'explicite par deux opérations annexes et complémentaires pour bien signifier ce qu'il en fait.
Grande hésitation de la part de Marie (M)
E tu peux lui donner les bonbons comme ça :
Marie (M) rien !
E tu peux dire comment, il a fait E au M : il a pu tirer avec un dé vert 3 et avec l'autre dé vert 2 et le blanc un 5,
Marie (M) poursuit puisque là il y a un o, on ne peut
E en direction du Xav. : est-ce que tu as eu un 0 ?
Xav (J) dit, non, je fais 5 moins 5.
E mais elle a compris 0 peut-être il faut que tu refasses.
Xav (J), mais, non, 3 bonbons parce qu'il y a un 3 et là un 0.
E tu as joué une fois ou deux fois ?
Xav (J) une fois
E Marie crois que tu as joué deux parce que tu as fait deux calculs.

T2

2ème notation

$$\begin{array}{r} 5 \\ -3 \\ \hline 0 \\ +3 \\ \hline 3 \end{array}$$

Xav (J) reformule son message pour Marie
Marie (M), il peut faire 5 moins 5 ça fait 0 et plus 3 ça fait 3.
E est-ce que tu comprends ?
Marie (M) je comprends pas parce qu'on dirait que ça fait 2 fois :
Xav (J) mais, non, j'ai joué une fois
E, elle pense tu as joué 2 fois :
Xav (J), mais, non, j'ai joué une fois,
Réponse de Marie, là 5 et puis celui-là 3.

DAVIS (J), DANY (M), E

T1

Davis obtient 4,6 V et 1 B
1ère notation :

9

Il note sur son message 9 (j'ai gagné 9 bonbons)

Dany (M) essaie d'interpréter le message (difficulté), ne donne pas de réponse.
E lui demande : est-ce que tu peux retrouver son résultat avec ce qui t'a marqué (9);
Dany (M) oui normalement mais il y a beaucoup de possibilités.
E tu penses que c'est suffisant pour comprendre ce qui s'est passé avec les dés seulement avec ce 9 ?
Dany (M), il y a combien de dés :
E 3.
Dany (M) se constitue progressivement une représentation de la règle du jeu en prenant connaissance des différentes variables de ce dernier. C'est ici que réside une des difficultés du rôle et du statut du vérificateur-marchand.
E poursuit est-ce que sur un dé on peut avoir 9 points ?
Davis (J), non
Dany (M) dit alors, il a eu 12 (sous-entendu sur les deux dés verts) et avec le dé blanc 3.
E tu aimerais (en direction du M.) qu'il t'explique les points des dés ?
Dany (M), il pourrait faire avec les dés verts 6 et 6 et avec le dé blanc 3, ça fait 9.
E c'est comme ça que tu as fait (Davis)

(suite Davis (J), Dany (M), E)

Davis (J) reprend en disant 9 c'est la résultat.
E tu peux lui expliquer pourquoi tu ne comprends pas ?
Dany (M) j'aimerais que tu m'expliques plus les points que tu as eus sur les dés.

<u>T2</u>

2ème notation : 10-1=9

avec deux dès j'ai eu 10.

Davis (J) reformule (en disant je comprends maintenant et il écrit 10-1=9

Après réception du message

Dany (M) dit, je vois maintenant qu'il a eu sur chacun des dés 5 ou 6 et 4 et sur le dé blanc 1.
E il peut avoir sur un dé 10 points ?
Dany (M) non.
E on aimerait savoir combien il y a de points sur les deux dés verts.
Dany (M) Je crois il en a 5 (sous-entendu sur chaque dé...), il poursuit en disant, on ne peut pas avoir 10 la limite c'est 6.

<u>T3</u>

3ème notation : 6+4-1=9

Autrement dit cette nouvelle écriture fait apparaître un de plus dans la composition. Le 10 des deux quantités de départ et repose le problème de son explicitation.

A ce moment là, Davis (J) entreprend une deuxième reformulation et dit : on peut, il y a deux dés et il écrit "avec deux dés j'ai eu 10 6+4=" (il s'arrête et commence à gommer le signe égal) il reprend son écriture 6 + 4 - 1 = 9.

Après lecture du message

Dany (M), il m'a donné toute la réponse, il fait avec les deux verts 4 et 6 et avec le dé blanc 1, je peux le donner les bonbons.

MARIA (J), ISAB (M), E

T1

Maria (J) obtient 5,4 V et 4 B
1ère notation :

$$\begin{array}{r} 9 \\ -\ 4 \\ \hline 5 \end{array}$$

Elle marque sur son message pour Isab (M) une addition colonne

Après lecture du message par Isab (M)
E lui demande "est-ce que tu comprends; "
Isab (M), je crois que c'est 5.
E relance les échanges en posant la question suivante : il y a trois dés dans le jeu, est-ce qu'on peut avoir un dé avec 9 points ?"
Isab (M) oui ... un dé ... non.
E tu peux lui dire à Maria pourquoi tu ne comprends pas tout à fait ce qu'elle t'a marqué ?
Isab (M) répond alors : ça va pas, si c'est deux on peut faire 9, mais avec un dé on peut pas faire 9. Avec des dés, c'est possible, il y a un dé qui aurait 5 et l'autre 4; celui qui est blanc il a 4. Tu peux refaire ?

T2

2ème notation :

$$\begin{array}{r} 5\ 4 \\ 5 \\ \hline - \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5\ \ 4 \\ 4 \\ \hline 5 \end{array}$$

Maria (J) recompose alors son message pour Isab (M) comme suite

$$\begin{array}{l} 5\ \ 4 \\ 5 \\ \hline - \end{array}$$

Isab (M) il faut donner 5 (bonbons) et puis, non !
E tu peux avoir 54 ?
Réponse d'Isab (M) oui 54-4;
E on peut voir 54 avec les dés ?
Isab (M) on peut pas,
Isab (M) remet le message à l'intention de Maria.

./.

T3

3ème notation :

$$\begin{array}{r} +5 \quad 4 \\ - \quad 4 \\ \hline 5 \end{array}$$

Maria (J) refait son message : en le remettant à Isab (M), elle met un signe + à côté de 4 manière à signifier que c'est bien un plus et place bien le 4 au milieu et entre les quantités gagnantes.

E tu peux lui donner ?

Isab (M), oui, elle dit : 5+4. Ca fait 5 oui... Il faut souligner donc la difficulté rencontrée dans la modification dela procédure de représentation utilisée par Maria dans son traitement de l'addition par colonne

SYLVIE (J), TRU (M), E

T1

Sylvie (J) obtient 2,2 V et 3 B

1ère notation :

Elle note 4 sur sa feuille destinée au marchand

4

E tu as fini (question à la suite une hésitation avant de remettre le message au Tru (M)

Syl (J) oui

E Après une longue lecture Tru (M) devant le message, est-ce que tu peux retrouver son résultat comme ça (c'est-à-dire seulement avec ce 4);

Tru (M) : non pas encore, il y a un dé blanc qui perd

E il est où sur la feuille ;

Tru (M) poursuit, on le voit pas sur la feuille.

E Il y a deux dés verts qui gagnent, un dé blanc qui perd et il ne les voit pas ...

Syl (J) reprend en disant : je dois marquer tout ce qu'il y avait alors, il faut que je remette le blanc avec ? Elle n'a manifestement pas opéré une composition des quantités en jeu, mais simplement annuler la quantité perdante.

T2

2ème notation :

7

Syl (J) refait sa composition et marque 7 sur le message pour Tru (M). Autrement dit elle additionne l'ensemble des quantités pour bien signifier qu'elle a bien compris...
Tru (M) : peut-être que les deux dés verts, elle a quelques plus que le blanc et le trois fait perdre et le dé blanc, il y a moins ?
E Tu penses parcequ'elle n'a pas mis le - ;
Tru (M) il poursuit en direction de Syl (J) : est-ce que tu comprends maintenant.
Syl (J) oui. Elle dit, je refais avec le moins.

T3

3ème relation : 7-3=4
4-3=1

Syl (J) reformule : j'avais 4,5,6,7 - 3 ; et elle note 7-3=4. En même temps, elle justifie son opération oralement : j'ai fait tout entier comme ça et puis j'ai compté tous les dés moins 3... Ca fait 4.
Tru (M) ne dit rien ?
E tu es sûr que les 3 dés gagnent ? Est-ce que ce n'est pas les dés verts qui gagnent et puis le dé blanc fait perdre...
Syl (J) dit alors il faut faire 4-3=1 parce qu'on additionne les verts et on fait - 3 = 1, et elle note en même temps 4 - 3 = 1.
Tru (M) dit peut-être que les 2 verts ils sont là (sur le 4) ;
Syl (M) dit j'ai compté 2+2=4 et puis le dé blanc a 3, j'ai 4-3=1.

ELSA (J), LAUR ( ), E

T1

Elsa (J) obtient 4,2 V et 3 B
1ère notation :

Elle dit : qu'est ce que je dois marquer ? en direction de l'E

j'ai gagné 6 bonbon et jané perdu 3 et il enresté 3

./.

(suite Elsa (J), Laur (M), E)

E répète la consigne
Elsa (J) pour Laur. "J'ai gagné 6 bonbons et Jané perdu 3 et il en reste 3" autrement dit;
Elsa compose l'ensemble de quantités en jeu et donne le résultat de l'opération en langage naturel.
Laur (M) hésite, devant la compostion du message;
E pose alors la question "c'est quoi ce 6 ?
Laur (M) : c'est les verts, avec les deux dés verts.
E On en sait pas très bien qui a gagné quoi (pour 6);
E Tu peux savoir
Laur (M) non.
E Tu peux lui dire pourquoi tu ne comprens pas ?
Laur (M) "Je peux savoir comment elle a fait avec les deux dés verts. Ca peut être 4 plus 2 ou je sais pas quoi ?
Elsa (J) ce truc je le laisse (pour sa première composition) et je marque. Pour signifier que c'est un complément à la première production.

T2

2ème notation :

il a un dée ou il y a 2 et lautre 4

Elsa (J) reformule la notation ci-dessus pour signifier la présence de deux quantités gagnantes pour le marchand ;
Laur (M) lit le message reformulé et il dit "je ne sais pas. Il y a un 2 où il y a 2 dés, et l'autre un" ; autrement dit, il y a hésitation sur les points des dés ou sur le nombre des dés.
E tu peux lui dire que tu ne comprends pas ?
Laur (M) un dé où il y a 2 et l'autre 4...
Elsa (J) je voulais marquer que dans l'un il y a 2 dés peits points, dans l'autre 4 (en réponse à l'argument de Laure).
Elsa (J) elle n'a reçu par exemple 4 et de l'autre 2 et elle en a perdu ... Cette reformulation est une façon de justifier la première production pour expliciter plus les deux quantités gagnantes.
Laur (M) dit : elle gagne rien du tout, 2+4 elle en gagne 3.
E tu peux lui dire pourquoi tu ne comprens pas,
Laur (M), il fallait qu'elle marque en tout, elle avait 6 et qu'elle a perdu 3.

./.

T3

3ème notation :

que j'ai eu 2 poin sur un dée et sur lotre 4 et
en tou cest 3 bonbon parseque jan est perdu 3

Elsa (J) refait son message pour Laure (M)
Laure (M) dit, après sa troisième lecture du message : il faut que je lui donne 3 bonbons;
E tu as compris ?
Laur (M) oui, elle a eu 2 points sur un dé et sur l'autre 4 ça fait 6.
E il est où le 6 (sur le message), Laure : elle a oublié de mettre le 6, elle a oublié en tout.

T4

4ème notation : (avec les cartes)

Elsa (J) reformule avec les cartes 4+2=6-3, et elle dit en même temps 2 et puis 4 ça fait 6 en tout égal à 6 et puis moins 3 et puis il me manque un 3... et enfin elle en tout = 3
Les deux reformulations : sont une suite de justification de la première production pour mieux signifier gain et perte... autrement dit il y a une double signification : 1/1 l'opération effectuée résiste aux différents échanges : "gagné, perdu et il enreste 3; en tout c'est 3 bonbons... 2/ Les différentes formulations signifient des compositions écrites différenciées pour mieux expliciter la première composition.
Elsa (J) compose avec les cartes 4+2=6-3, et elle dit en même temps 2 et puis 4 ça fait 6 en tout égal à 6 et puis moins 3 et puis il me manque un 3....et enfin elle en tout = 3.

Comme nous venons de le constater à travers ces contenus (d'interactions/ communications) ce qui retient l'attention d'une manière générale, c'est le caractère progressif de la démarche de résolution chez les deux protagonistes, qui élaborent en commun des modifications à la première production. C'est ainsi qu'apparaît comme essentielle la double activité de la relance : vérification/justification. Nous constatons également que la fonction de la relance entraîne des modifications des représentations chez les deux protagonistes : mais surtout chez les écrivains, pour les raisons qui tiennent à leur rôle dans le jeu. En outre, le rôle du marchand est relatif à la prise de conscience de son statut dans le jeu; c'est-à-dire qu'il est lié à la compréhension des règles du jeu et de son implication dans la résolution du problème. Autrement dit, malgré toutes les dispositions préalables à l'épreuve, nous pouvons dire que les enfants marchands n'entrent et ne saisissent l'enjeu du problème que progressivement; dans ce but, l'expérimentateur rappelle constamment le rôle vérificateur au marchand. C'est donc en recevant la première formulation de l'écrivain que le marchand élabore une représentation de résolution à partir de laquelle il réagit envers le message de l'écrivain et afin de relancer le jeu.
L'expérimentateur pose la question suivante au M.
"tu peux lui expliquer pourquoi tu ne comprends pas à ce moment-là?"
Le M. explicite sa représentation de la résolution au J. en ces termes : un exemple de ce désaccord sur une composition additive "lacunaire";

- Chris. (M) dit à Lisa(J) "j'ai trouvé, elle fait par exemple 4+5=9 et puis après -2 ça fait 7";
- ou bien devant l'implicite d'une quantité, Thér.(M) dit à Sans(J) "je ne sais pas combien les verts, ils ont tiré...
- et Jev.(M) dit "il y en a 2 (pour les 2 verts) ça peut faire 5 et puis 2 ou 7, ça peut être un sur 5 et l'autre 2 ou 6 et 1... il y a beaucoup de difficultés (c'est-à-dire beaucoup de possibilités).

C'est donc en ces termes que le marchand explicite sa procédure de résolution à l'écrivain. Il y a donc bien une articulation entre la composition additive et l'écriture qui devient l'instrument de réflexion sur le jeu des dés.

En effet, comme nous l'avons observé dans les différentes phases d'échanges (formulation et reformulation) qui s'articulent à travers les arguments et contre arguments entre écrivain et lecteur, ceux-ci mettent en oeuvre un processus de recherche de la compréhension des compositions arithmétiques et des recompositions. En d'autres termes, il s'agit d'une mise en oeuvre en commun de la construction d'un sens, en référence à différents registres symboliques, en actualisant de nouvelles explicitations et en modifiant les procédures de représentation.
Par ces différents contenus d'entretiens nous élucidons mieux la résolution de la tâche proposée aux enfants et par les points suivants :

- la nature des conflits à propos de la formulation produite
- la nature des indices de la relance
- et enfin la nature des modifications apportées aux procédures de représentations.

4. Les indices de la relance

Les enfants marchands amorcent donc le processus de la relance du jeu sous l'effet de la vérification "attentive", à travers les ambiguités, les incompréhensions ou les hésitations d'une écriture produite par l'écrivain (joueur) qui s'èxpriment en ces termes : "Je ne comprends pas ce qu'il a marqué là...", il n'a pas fini son calcul...", il manque quelque chose dans son calcul... mais je peux lui donner ..." etc. Cependant l'effet dit "attentif" des marchands est constamment rappelé par l'expérimentateur du jeu qui à cet égard "exploite" toutes les incompréhensions ou hésitations du lecteur sur la nature même de la production écrite.
Ceci est fait dans le but de créer cette confrontation conflictuelle entre les deux protagonistes sur le statut de la notation additive produite par l'écrivain. Il faut relever que cette situation donne lieu à différentes interactions verbales entre les élèves et l'expérimentateur. L'expérimentateur active le processus de la relance par la mise en évidence de l'incompréhension du récepteur face à la production "est-ce que tu peux lui donner (les bonbons) avec ça..."(c'est-à-dire avec cette notation) renforçant ainsi son interrogation; ou bien "peux-tu vraiment comprendre ce qu'il t'a marqué" il ne faut pas oublier qu'un marchand ne peut pas donner ces bonbons, s'il ne comprend pas le billet ...". Et enfin, à ce moment là nous rappelons au marchand, la dernière partie de la consigne : "Peux-tu lui expliquer pourquoi tu ne comprends pas ce qu'il t'a marqué...".

L'intérêt de cette dernière partie de la consigne permet au marchand de communiquer à l'écrivain à la fois sa procédure de symbolisation et sa stratégie d'explication de la composition.
Ainsi, l'élaboration du jeu (et de la reformulation du message) s'effectue, d'une part sur le statut des contenus d'écritures et d'autre part sur le bien-fondé de ces productions écrites.
Il faut noter que c'est durant les temps 1 et 2 qu'interviennent la relance et la reformulation. A cet effet nous avons relevé systématiquement les indices pertinents, qui permettent de relancer le jeu, à travers les différents sondages préalables à l'expérience. Autrement dit l'étude de ces indices de la relance est une partie essentielle de l'analyse de la résolution de la tâche, ce qui se traduit par les contenus suivants qui sont proposés aux enfants afin de leur rappeler les composantes du jeu.

- Lorsque les enfants joueurs/écrivains représentent seulement le bilan de la composition : par exemple, l'enfant qui note 6 (alors qu'il a obtenu 5+4-3=6 (1) et il dit, "j'ai gagné 6 bonbons". La question suivante lui est posée :"est-ce qu'il y a qu'un seul dé dans le jeu ?"
- Dans un situation proche de celle de ci-dessus, l'enfant dit "j'ai gagné 9" et il représente le bilan sur son message pour le marchand (alors qu'il fait 6+5-2=9); nous relançons le jeu sur cette notation (9), en posant la question suivante :"peut-on avoir 9 points sur un seul dé ?"
- En revanche, les enfants peuvent marquer 3-1=2 (pour 2+1-1=2) à ce moment là la question suivante est posée :"est-ce qu'il y a qu'un seul dé qui gagne ?"
- Lorsque les enfants composent en additionnant les trois quantités en jeu dans l'opération (4+5+3=12) : les questions suivantes sont posées :"où est-il le dé qui fait perdre dans le jeu?"
  ou encore :
  "est-ce qu'on peut savoir ce que tu as gagné en tout comme bonbons ?"

(1) Il faut rappeler qu'il y a dans le jeu deux dés qui font gagner et un qui fait perdre.

- Lorsque les enfants ne représentent ni les signes des opérations ni le bilan de l'opération : ex. 4 5 3 ; mais s'ils désignent les gains et la perte, par un espace entre les quantités obtenues : "est-ce qu'on peut savoir qui gagne et qu'est-ce qui perd comme ça ?" Souvent les enfants désignent les gains et la perte par le langage naturel : l'enfant écrit sous forme d'énoncé ou l'annonce oralement, "j'ai gagné 5 et 4 et j'ai perdu 3".

  ou bien

  Ex. 5 4 3
  G G P

  A ce moment-là la question suivante est suggérée : "est-ce qu'on peu savoir ce que tu as gagné en tout avec les trois dés" (répétition de la consigne).
- Enfin, lorsque les enfants produisent les compositions suivantes :

  5+4-3
  9 je gagne 9 bonbons

  ou bien

  5+2=7
  4

  Dans ce cas la consigne est reprise pour mieux repréciser que 3 dés comptent dans le jeu.

5. Présentation des résultats

Nos résultats ont été analysés selon trois aspects :

- les formulations jugées irrecevables par le lecteur (M) : ceci nous donne les arguments utilisés par le lecteur (M) pour vérifier les formulations,
- les formulations jugées recevables par le lecteur (M) : ceci nous donne les représentations "suffisantes" pour conceptualiser le jeu,
- l'évolution des formulations tant du point de vue des signifiés que des signifiants.

5.1. Inventaire des productions écrites aux différents temps (Tableau 1)

Les procédures de symbolisation utilisées par les élèves nous permettent d'observer le nombre de registres de référence lors de l'activité de formulation.

Tableau 1

Les quantités obtenues	La formulation T1	La reformulation T2	La reformulation T3
1. 5,4v et 3b (M) José (J) Pauli	5 + 4 - 3 6		
2. 5,4v et 6b (M) Math (J) Syl.	3	5+4-6=3	
3. 6,4v et 2 b (M) Karin (J) Eléna	10-2=8	6/4-2=8	
4. 2,5v et 4b (M) Lili (J) Jes.	2 5 - 4 3	2 + 5 - 4 3	
5. 6,3v et 3b (M) Rachel (J) Flo.	6x3=9-3=6	6+3=9-3=6	
6. 4,3v et 4b (M) Serv. (J) Ced.	7-4=3	3+4-4=3	
7. 1,2v et 1b (M) Chris. (J) Lisa	3-1=2 un vert dis vert à le numéro 2 et l'autre a le numéro 1 le blanc a le numéro 1.		
8. 5,1v et 1b (M) Franc. (J) Fransc.	6-1=5	5x1 5+1-2 5+1=6-1=5	
9. 6,5v et 3b (M) Sand (J) Chris.	8	6+5=11 11-3=8	

Tableau 1 (suite)

10. 3,3v et 5b (M) José (J) maria	3 2 6 — 11	3 - 2 6 — 0	3 3 5 — 1
11. 4,6v et 6b (M) Thérèse (J) Sand	10-6=4	vert 6 vert 4 blanc - 6	
12. 6,6v et 4 b (M) David (J) Jean	12-4=8	j'ai compter avec les deux dés	6+6-4=8
13. 6,3v et 2b (M) Nad. (J) Lan.	En tout je dois avoir 11 bonbons mais comme je dois en enlever 2 points il m'en faut moins	Avec les trois dés j'ai obtenu 11 le nombre 11 mais comme je doit en enlever 2 bonbons sur un dé vert j'ai obtenu 6 et l'autre dé j'ai eu 3 il ment faut 3	Sur le dé blanc j'ai 2, sur un dé vert j'ai 6 et l'autre dé vert j'ai 3
14. 4,1v et 3 b (M) Chris. (J) Mata	Je voudrais 2 bonbons	J'ai 8 bonbons j'en ai perdu 3 il me reste 2 bonbons	Sur un dé j'ai eu le chiffre 4 et sur l'autre dé vert j'ai eu le chiffre 1 et sur le dé blanc j'ai eux le chiffres j'ai gagné 8 bonbons et perdu 3 bonbons total 5
15. 4,3v et 4b (M) Fran. (J) Hélè	p4 b3	p4 g3 3	p4 g3 7 4
16. 5,3v et 5b (M) Maria (J) Xav.	5 3 - 5 + 0 — 0 3	5 - 5 — 0 + 3 — 3	
17. 6,4v et 1b (M) Dany (J) Davis	9	10-1=9 avec deux dés j'ai eu 10	6+4-1=9

Tableau 1 (suite)

18. 5,4v et 4b (M) Isab. (J) Maria	9 - 4 9 - 4 5	5 4 5 - 5 4 4 9	+ 5 4 - 4 5
19. 2,2v et 3b (M) Tru. (J) Sylvie	4	7	7-3=4 4-3=1
20. 4,2v et 3b (M) Laur. (J) Elsa	J'ai gagné 6 bonbons et je né perdu 3 et il enreste 3	Il a un dé ou il y a 2 et l'autre 4	J'ai eu 2 poin sur un dée et sur l'autre 4 et en tout c'est 3 bonbon parceque j'an est perdu 3.

5.2. Analyse des résultats

Dans le cadre des différentes relances du jeu, l'écrivain (J) prend une place prépondérante dans l'activité de formulation, comme nous avons pu le constater dans ce travail. En revanche, le lecteur (marchand) occupe un rôle essentiel dans le déroulement de la relance du jeu, par sa vérification attentive de la production permettant une interprétation progressive du message, c'est-à-dire une reconstruction d'un sens en commun avec l'écrivain. Le lecteur peut argumenter spontanément (ou en interaction avec l'expérimentateur) sur les insuffisances de l'écriture produite mettant ainsi en conflit l'écrivain en utilisant les indices de la relance du jeu. Et pour mieux élucider le rôle tenu par le lecteur dans le jeu, nous avons relevé systématiquement ses interventions qui portent sur :

- les règles du jeu
- les propriétés du matériel
- les caractéristiques du symbolisme (signes, et agencements de signes).

- Pour cela, nous présentons l'ensemble des écritures, jugées irrecevables par le lecteur aux différents temps de l'expérience et nous les classons selon les trois rubriques indiquées.
- Si maintenant on fait le bilan des écritures recevables par le lecteur aux différents temps du jeu, on peut avoir une image de l'utilisation que des élèves font des écritures équationnelles apprises lorsqu'ils sont sollicités par ce type de situation de communication.

  Il s'agit des formulations à propos desquelles s'est établi, entre l'écrivain et le lecteur, un accord témoignant de l'adéquation de la représentation.

Tableau 2

FIN DU TEMPS 1		TYPES DE RELANCES		
Formulations irrecevables par le lecteur *		Règles du jeu	Propriété du matériel	Caractéristiques du symbolisme
Formulations Nos	RELANCES à l'initiative du lecteur seul			
2		2		
4				4
9		9		
10			10	
12			12	
13			13	
15				15
16				16
17		17		
19			19	
	RELANCES en interaction avec l'expérimentateur			
6		6		
7		7		
11		11		
14		14		
18			18	
20		20		

* Pour les formulations voir le tableau 1 des procédures de symbolisation

Tableau 3

FIN DU TEMPS 2		TYPES DE RELANCE		
Formulations irrecevables par le lecteur *		Règles du jeu	Propriétés du matériel	Caractéristiques du symbolisme
Formulations Nos				
10	RELANCES à l'initiative du LECTEUR			10
13		13		
16				16
19		19		
12	RELANCES en interaction avec l'expérimentateur		12	
14		14		
15				15
17			17	
18				18
20		20		

* Pour les formulations voir le tableau 1 des procédures de symbolisation

Tableau 4

TABLEAU RECAPITULATIF

	Règles du jeu	Propriétés du matériel	Caractéristiques du symbolisme
Fin du T1	2 9 6 7 11 17 14 20	10 12 13 18 19	4 15 16
Fin du T2	19 13 14 20	12 17	10 15 16 18
	n = 12	n = 7	n = 7

On note que le plus grand nombre de relances, suite au refus du message écrit font référence aux règles du jeu.
On note également que du T1 au T2, l'évolution va dans le sens d'une diminution des relances en termes de règles du jeu et de propriétés du matériel, alors que ce n'est pas le cas pour la référence aux caractéristiques du symbolisme

Tableau 5

FORMULATIONS JUGEES RECEVABLES par le lecteur

	Nos
FIN DU TEMPS 1	
	1
	3*
	8*
FIN DU TEMPS 2	
	2
	3
	4
	5
	6
	7
	8
	9
FIN DU TEMPS 3	
	10
	11
	12
	14
	16
	17
	18
	19
	20

*Note : ces deux productions seront réanalysées ensuite par le lecteur, pour obtenir plus de précisions.

On constate que sur les 18 productions acceptées sur les 20 produites :

- 5 seulement revêtent la forme a+b-c=x : n^{os} 2,3,6,12,17
- 5 prennent la forme d'un clacul en colonnes : n^{os} 1,4,10,16,18
- 3 ont l'allure équationnelle, mais expriment l'enchaînement des calculs :
  - 2 productions du type a+b=c-d=x : n^{os} 5,8
  - 1 production du type a+b=c, c-d=x : n^{o} 9
- 3 sont un commentaire en langage naturel qui explicitent un calcul : n^{os} 7,14,20
- 2 sont une forme contractée de l'écriture équationnelle : n^{os} 11,19

+ les formulations 13 et 15 se sont prolongées au Temps 4.

5.2.3. L'évolution des formulations

a) classification des formulations

A. DESCRIPTION

1. Description partielle
   1.1. les quantités ne sont pas "différenciées"

   2

   1.2. les quantités sont "différenciées"

   +3

2. Description exhaustive
   2.1. les quantités ne sont pas "différenciées"

   2 5 4

   2.2. les quantités sont "différenciées"

   figuratif 1 4

   2 Vert 6 vert 4 et blanc -6

   arithm. 5+4-2

B. COMPOSITION PARTIELLE

1. le résultat de la composition partielle est seul représenté.

1.1. La quantité n'est pas différenciée : 8

1.2. La quantité est différenciée : +8; gagné 8

2. Le résultat de la composition partielle est associé à une autre quantité :

2.1. Les quantités ne sont pas différenciées : 9 2

2.2. Les quantités sont différenciées : gagné 5 ; perdu 3

3. L'opération de composition partielle est seule représentée.

$$4+5=9$$

4. L'opération de composition partielle est représentée associée à d'autres quantités.

$$6+3-2=9$$

5. La perte est transformée en gain. La composition des gains est représentée

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ \underline{6} \\ 11 \end{array}$$

C. COMPOSITION TOTALE

1. Le résultat de la composition totale est seul représenté :

1.1. Non différencié : 11

1.2. Différencié : gagné 7

2. Le résultat de la composition totale est représenté associé à une autre quantité.

1.1. Non différencié : 10 7

1.2. Différencié :

au début du jeu : 11

à la fin du jeu : 9

3. L'opération de composition totale est représentée :

3.1. Le résultat d'une composition partielle et une autre quantité :

$$11-3=8 \qquad \begin{array}{r} 7 \\ \underline{-3} \\ 4 \end{array}$$

3.2. Les trois quantités et un résultat intermédiaire

$$4+1=5-3=2 \;;$$

$$3+1=4$$
$$4-2=2$$

3.3. L'opération sur les trois quantités

$$5+4-2=7 \qquad \begin{array}{r} 6 \\ +1 \\ \underline{-3} \\ 4 \end{array}$$

b) Les modifications des formulations

Tableau 6 : l'évolution de la composition additive au cours du jeu

	T1	Fin du jeu	T2	Fin du jeu	T3	Fin du jeu	T4
Description A			2		1		0
Composition partielle B	4		5		1		0
Composition totale C	16		11		7		2
Nombre de Formulations	20	2	18	9	9	7	2

Nous observons à partir de ce tableau que durant la première formulation T1, il y a seulement deux productions satisfaisantes pour les enfants lecteurs; ce qui permet la relance du jeu par la reformulation. Cependant, après la première reformulation (T2) 9 couples sur 18 finissent le jeu en produisant une composition satisfaisante pour les lecteurs.

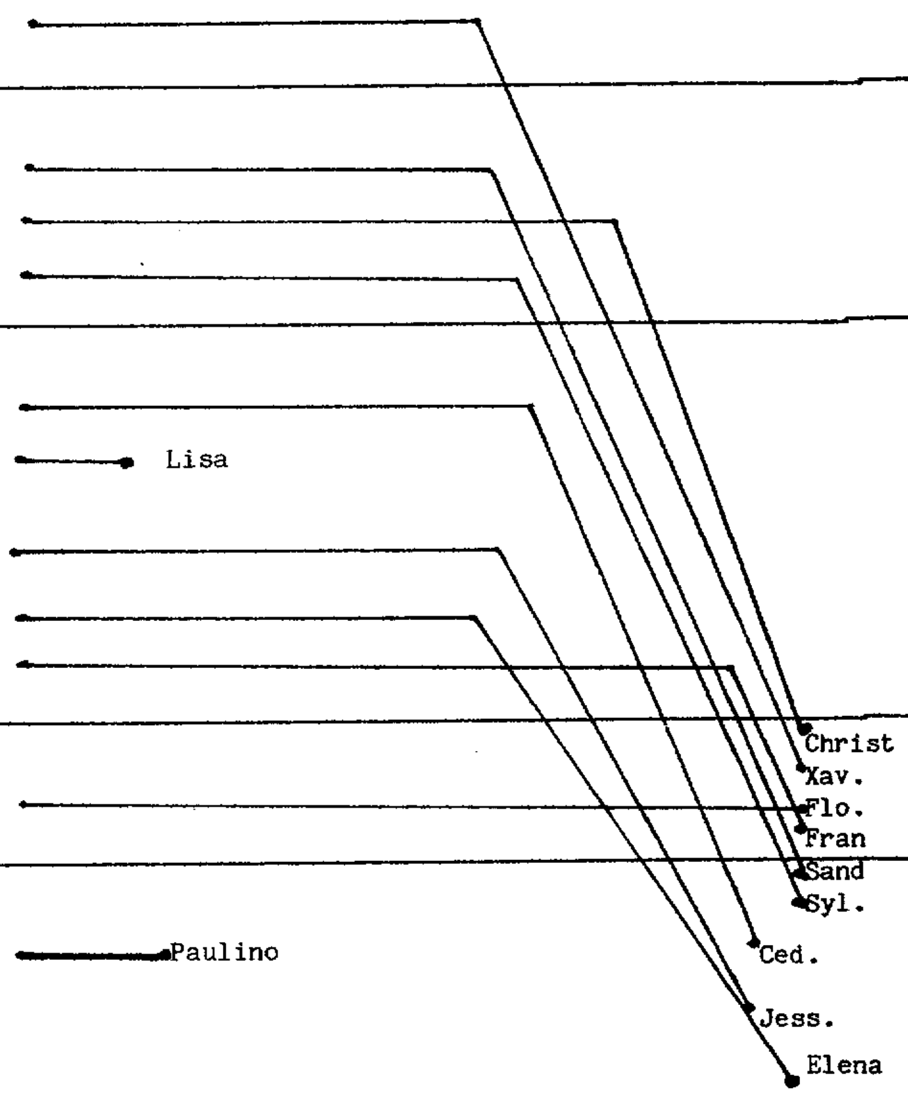
A la suite de la deuxième reformulation (T3) 7 couples terminent le jeu en produisant des compositions satisfaisantes pour les marchands.

Autrement dit, lorsqu'on arrive à la fin du (T3), 18 couples sur 20 ont achevé le jeu en produisant des compositions classées en C ($C_{3\ 1}$, $C_{3\ 2}$ et $C_{3\ 3}$) dans des formulations écrites différenciées.

Tableau 7

5.3.1. <u>Evolution de la composition et de l'explicitation du Temps 1 au Temps 2</u>. (pour les couples ayant arrêté le jeu au temps 2. Suite à l'acceptation de la formulation de la part du lecteur M)

*		T1	T2
A_2			
B_3	(J) Xav. (M) Marie		
C_1	(J) Sand (M) Thér. (J) Christ (M) Sand (J) Syl. (M) Math.		
C_{3_1}	(J) Ced. (M) Serv. (J) Lisa (M) Chris. (J) Jess (M) Lili (J) Elena (M) Karim (J) Fran (M) Franc	Lisa	
C_{3_2}	(J) Flo. (M) Rach.		
C_{3_3}	(J) Paulino (M)M.José	Paulino	

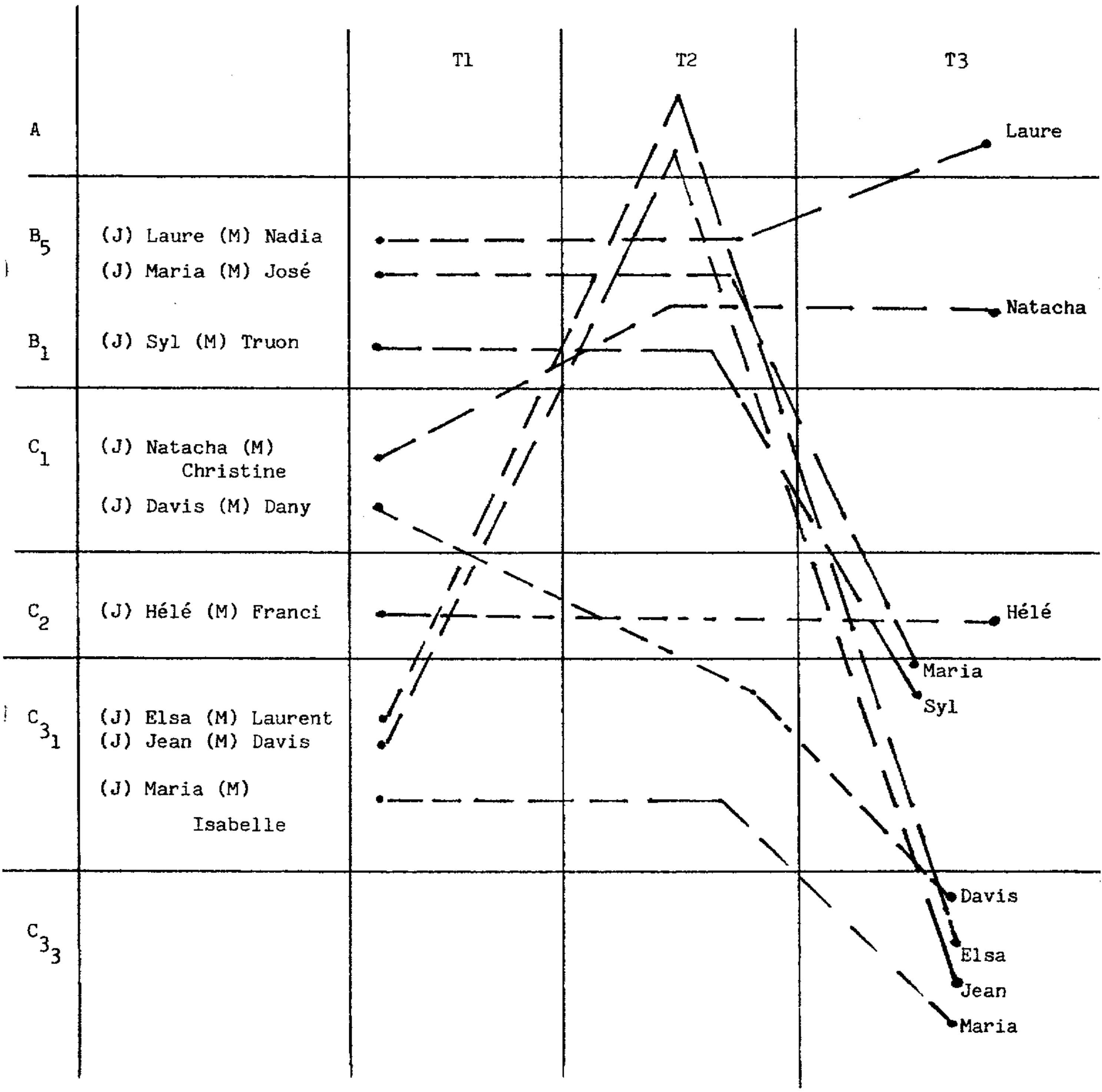


* les symboles utilisés dans cette colonne sont ceux de la classification des formulations (p. 49-50-51)

Tableau 8

5.3.2. Evolution de la composition et du comportement du Temps 1 au Temps 3

(pour les couples avant effectué le temps e de l'expérience)



Nous pouvons dire que les compositions en C_1 sont les plus implicites pour les récepteurs; ce qui est signifié, est seulement le résultat d'une opération additive implicitement exécutée sur le message souvent en terme de bilan (9;3.. etc.).
Le résultat est souvent accompagné d'une explication verbale comme support à la compréhension du marchand : car les écrivains se rendent relativement compte de l'insuffisance de leur opération : ils disent, c'est ce que j'ai gagné ... Ce type de composition est une pratique courante dans la vie quotidienne des enfants (gagner/perdre ou vendre/acheter ...) sous l'appellation de "calcul mental".
Cependant, cette composition implicite en terme de bilan en C_1 demande aux écrivains une reconstruction de leur opération sur le plan de l'écriture; ce qui donne bien à la fois des nouvelles formulations ouvertes et à la recherche d'une signification commune entre les deux protagonistes (émetteur/récepteur).

- A l'exemple de Mata (J) qui obtient (4,1V et 3B) et marque pour Christ. (M) "Je voudrais 2 bonbons", j'ai gagné 6 et perdu 4 avec le blanc" ... elle reformule "j'ai 8 bonbons, j'en ai perdu 2 il me reste 2" etc. et puis à la troisième reformulation "sur un dé vert j'ai eu le chiffre 4 et sur l'autre dé vert j'ai eu le chiffre 1 et sur 1 dé blanc j'ai eu le chiffre 3".
- "J'ai gagné 8 bonbons et j'ai perdu 3 bonbons, total 5"; ou bien l'exemple de Davis (J); il dit, "j'ai gagné 9 bonbons" et il marque "9" sur som message à Dany (M); à la première relance Davis modifie entièrement sa notation (en disant "je comprends maintenant") il note "10-1=9", le marchand est satisfait de la notation ... mais nous poursuivons pour approfondir encore plus la production, il écrit "avec deux dés j'ai eu 10", ensuite il note au (T3) 6+4= (il s'arrête et gomme le signe =), il refait "6+4-1=9".

Autrement dit, l'écart entre la production initiale et la production en rapport avec les exigences du jeu est grand. Cet écart sur la nature de la notation active à la fois des conflits sur le statut de l'écriture produite et sur les stratégies de réorganisation de la formulation.

Les reformulations du T2 et T3 impliquent une mise en oeuvre de l'écrivain, qui nécessite une double activité cognitive, d'une part la mise en relation des différents éléments de la situation (les éléments en jeu dans l'opération) et d'autre part un processus de compréhension progressif inférant au système symbolique arithmétique qui est lié au registre de l'écrit.
Les productions en $C_{3\ 1}$ sont d'une part les plus nombreuses au T1 (nous en obtenons 8 sur 20) et d'autre part elles sont relativement les plus élaborées produites en T1 : par exemple cette formulation

$$\begin{array}{r} -8 \\ \underline{2} \\ 6 \end{array}$$

est classée en $C_{3\ 1}$ (composition où les gains sont confondus).
Ainsi, à l'étonnement de l'écrivain, le lecteur ou l'animateur disent, "ils sont où les dés qui gagnent"; réponse de l'écrivain "mais ils sont là" (le soigt sur le 8 pour signifier les gains). Et s'amorce la relance (1) "peut-on avoir 8 sur 1 dé ?...; "mais il y a deux dés là" ...

- A l'exemple d'Eléna qui marque 10-2=8 pour Karin qui réplique (après discussion) "parceque sur un dé on peut avoit 10 ..." Eléna "ah oui", elle reformule : 6/4-2=8.

Il faut souligner que les écrivains qui composent dans cette écriture arithmétique ont moins de modifications à apporter à leur production; cette modification porte essentiellement sur l'explicitation des gains (6+4=10 .. 4+4-2=6).
Autrement dit, l'écart à la norme de ce type de composition est assez réduit.
Or, cette écriture produite au T1 (par 9 couples) est "structurante" pour la reformulation au T2 et T3; autour d'elle les écrivains organisent d'une manière pertinente leur reformulation comme le montre ce tableau 7;
9 couples finissent donc en T2 par une composition complète : (5 en $C_{3\ 3}$ du type 6+4-1=9, et 4 en $C_{3\ 2}$ du type 3+4=7-2=5, ou 6+5=11 11-3=8).

(1) Voir les différents indices de la relance du jeu.

En revanche 4 autres couples terminent le jeu au T3, en $C_{3\ 3}$ comme nous l'avons vu dans le tableau 8; ils procèdent par des productions intermédiaires afin de mieux faire signifier au marchand les gains obtenus.

- A l'exemple de Jean (J) qui marque 12-4=8, David (M) lui dit, "on peut avoir 12 points sur un dé"; il recompose une première fois "j'ai compter les deux dés" (après discussion) il reformule une deuxième fois : 6+6-4=8. Ainsi les explicitations passent de la composition à la décomposition des gains (en terme de description) et à la recomposition complète au T3, sous diverses formulation donnant lieu à des modifications relativement importantes dans les écritures, langage arithmétique et langage naturel peuvent alterner.

Les productions classées en A sont des descriptions (des gains et de la perte obtenus par l'écrivain); au T1, les enfants ne composent pas. Cependant, si la procédure de description utilisée à un dispositif différencié des quantités (c'est-à-dire marquant la perte ou les gains) par l'utilisation des signes (ex.: 3+4-2) et que l'écriture est un langage arithmétique, le récepteur demande à l'écrivain "mais je ne peux pas te donner les bonbons parceque je ne sais pas ton résultat".

- A l'exemple de Paulino qui au T1 fait $\begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ -3 \end{array}$ recompose, sous l'effet de la relance, en faisant $\begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ \underline{-3} \\ 6 \end{array}$

  En effet, cette procédure de description en T1 proche de l'écriture arithmétique active par sa disposition structurée un certain déterminisme chez les écrivains aboutissant à la réalisation de l'opération.

En revanche, il faut souligner que 3 couples d'enfants utilisent des procédures intermédiaires de décomposition (des gains et de la perte) au T2 alors qu'ils ont composé au T1 (en $C_{3\ 1}$) tableau 8. Or cette composition leur permet une procédure d'explicitation plus grande pour bien signifier les quantités présentes dans le jeu pour le lecteur.

- C'est ainsi que Sand. note 10-6=4 au T1 à destination de Thér., et au T2 décrit "vert 6 vert 4 et balnd -6".
- Jean marque au T1 12-4=8 pour David, ensuite au T2 pour expliciter les gains il note "j'ai compter avec les deux dés" et enfin au T3 il actualise l'ensemble des quantités : 6+6-4=8 sous l'effet de la deuxième formulation.

Et enfin les contraintes de la relance et de la reformulation amènent les enfants à restructurer leur production du T1 ou à utiliser en T2 la procédure de la description dans le but d'une plus grande explicitation des quantités obtenues pour le récepteur du message. Les productions en T3 sont des compositions additives partielles qui annulent très souvent la perte (ex. 4+3=8 ..., 9 gagné, 2 perdu etc.) ou la transforment en un gain. Les écrivains tiennent compte essentiellement de l'aspect positif des gains dans la composition, en annulant son aspect négatif (1). Il faut noter par ailleurs qu'à l'intérieur des productions en T3, il y a différentes procédures de nature implicite ou indifférenciée. A l'exemple de Syl. qui obtient (2,2V et 3B) elle note 4 annulant la perte.

Dans certaines productions les enfants procèdent à la transformation de la perte en gain et additionnent l'ensemble des quantités en jeu; la question qui est posée alors à l'écrivain par le marchand, "il est ou le dé qui fait perdre ?" (ex. 11 résultat non différencié ... 6+4=11). Dans les procédures de symbolisation implicites ou différenciées au T1, à l'exemple de Xav. qui produit une composition élaborée qui a été classée en B3 pour des raisons de compréhension du récepteur n'ayant décodé qu'une partie de l'opération. Xav. a spontanément composé l'ensemble des quantités en donnant pour commencer seulement le résultat 3; ensuite il se rend compte, sans relance que ce n'est pas suffisant, il barre ~~3~~ pour mieux expliquer au marchand son résultat. Alors, il entreprend un développement en deux temps par une opération additive $\begin{array}{r}5\\-5\\\hline 0\end{array}$ et $\begin{array}{r}3\\+0\\\hline 3\end{array}$

(1) J. Piaget : Recherches sur la Contradiction. pp, 95. PUF, 1974

Le marchand tient compte seulement de la première opération et il dit "... rien, puisque là, il y a un 0, on peut rien donner pour un zéro 0 c'est 0". Cette organisation paraît relativement lacunaire de la part du récepteur et ceci malgré la passation d'un prétest pour classer les marchands et joueurs de dés; cependant dans les relances s'instituent des réglages dans les échanges par l'intermédiaire de l'animateur du jeu. Dans le T2 Xav. reformule sa production en saisissant la pertinence du conflit entre lui et le marchand, il note alors

$$\begin{array}{r} 5 \\ \underline{-5} \\ 0 \\ \underline{+3} \\ 3 \end{array}$$

. Entre d'autres termes, dans les différents rôles qu'assument les protagonistes, il existe une certaine marge dans le temps pour rentrer dans la compréhension réelle du jeu. Toutefois, on observe des procédures intermédiaires de résolution qui empruntent B pour mieux expliciter les compositions par des opérations intermédiaires.

Durant les trois séquences confondues (T1, T2 et T3) et dans l'ensemble des procédures de symbolisation utilisées par les élèves pour confectionner leur message, nous pouvons observer quatre types de procédures dans les registres d'écritures différenciées : les productions les plus nombreuses (13) sont effectuées en langage arithmétique : 8 dans des écritures équationnelles (du type 5+4-6=3 ou bien 11-3=8 ..); et les autres productions (c'est-à-dire 5) sont réalisées par des procédures en colonnes (du type :

$$\begin{array}{r} 2 \\ 5 \\ \underline{-4} \\ 3 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 3 \\ \underline{-5} \\ 1 \end{array}$$

..);

Ensuite 3 productions sont effectuées en langage naturel (du type : j'ai gagné 6 bonbons et je né perdu 3 et il en reste 3) et enfin, les 4 derniers confectionnés dans des productions mixtes, en alternant langage arithmétique et langage naturel (ex.: (T1) 12-4=8, (T2)"j'ai compter avec les deux der," (T3) 6+6-4=8 ..).

Lorsqu'une résolution est amorcée dans un registre symbolique, elle a une très forte probabilité de s'achever dans ce même registre. Il nous semble important de souligner que le mode d'emprunt à un registre d'écriture actualisé subit très peu de modification dans le déroulement de l'épreuve.

Nous n'observons pas le passage spontané d'une procédure de symbolisation à une autre sinon qu'une première (T1) "interfère" avec une autre (au T2) et au T3 réapparaît la procédure du T1.

ex. T1 10-6=4

T2 vert 6 vert 4

bland -6

puis : "oui, mais c'est juste 10-6=4"

Nous voyons deux raisons à ce phénomène : premièrement, le processus d'interaction porte sur les règles du jeu même, au sens à la fois d'une grande précision dans la reformulation de la composition et d'une explicitation plus exhaustive des éléments de l'opération; ce qui implique évidemment le passage à l'écriture, moyen d'explicitation des différentes transformations (ex.: T1 3 à 5+4-6=3) afin de bien signifier le bien-fondé du résultat du T1. Il faut à ce niveau noter que le processus d'explicitation et de précision porte à son tour sur les indices de la relance qui deviennent en quelque sorte un support partinent dans le fonctionnement du jeu.
Deuxièmement, conne nous le constatons les enjeux de la résolution ne portent pas directement sur les registres des écritures utilisées, mais bien sur les règles du jeu.
Cependant, l'actualisation d'un des registres symbolique (dans sa double dimension syntaxique et sémantique) se pose souvent en terme d'obstacle dans l'articulation de la résolution.

ex. T1 p4 b3

T2 p4 ~~b~~ g3

T3 p4 g3

7 4

T4 4

3 4

3 4 4

Il faut souligner à ce niveau la "résistance" des registres de symbolisation, malgré les échanges conflictuels entre les interlocuteurs; quand la résolution est engagée dans un registre en T1 les enfants écrivains travaillent en rapport "exclusif" à cette écriture actualisée et pertinente (même si cette écriture ne rend pas toujours compte de la démarche et de la résolution).

6. Conclusion

Dans la synthèse de ce travail nous abordons les points qui nous paraissent être au centre de notre préoccupation sur la formulation dans un contexte de communication.

1. Le premier constat est l'importance du caractère séquentiel des échanges dans le déroulement des épreuves donnant lieu à une construction progressive de la formulation. Cette "microgenèse" de la formulation se confirme comme nous l'avons vu, à travers les différentes modifications des messages occasionnées par les échanges conflictuels; ces modifications ne sont pas seulement une simple soumission de l'écrivain aux arguments du lecteur, mais bien une réorganisation mentale passant par des modification de procédures de symbolisation.

En effet, les résolutions successives et différenciées se traduisent à la fois par des significations tirées des contenus de la situation problème en actualisant progressivement un sens partagé entre l'écrivain et le lecteur et par l'organisation de la résolution en terme de "planification" de l'activité de résolution comme l'a montré SAADA-ROBERT (1979) "un aspect d'organisation et un aspect d'ordre hiérarchique définissant la suite des étapes à accomplir".

2. Le deuxième constat : il est significatif d'observer qu'au terme des trois temps du jeu, le recours à l'écriture équationnelle conventionnelle (a+b-c=x) n'est pas le plus fréquent.
   De même l'analyse du contenu des relances nous a montré que la référence aux règles du jeu et au matériel est beaucoup plus fréquente que la référence aux caractéristiques symboliques. Cependant, il faut noter que l'actualisation du langage arithmétique pour rendre compte des opérations effectuées est plus souvent rencontrée dans cette recherche en 3^{e} année d'école primaire que lors des expéreinces menées en 2^{e} année. Ceci peut être dû aux caractéristiques de la situation, mais aussi du degré ou à l'âge scolaire. La formulation n'est pas traitée d'emblée en terme de relation, mais d'abord comme l'expression d'une suite d'actions et de claculs, comme l'a mis en évidence F. CONNE chez les élèves de 1^{e} année primaire à propos de la lecture des équations lacunaires (CONNE 1979).

3. Notre troisième constat concerne les traitements que font les enfants sur la symbolisation dans différents registres utilisés lors de la formulation. Quand les enfants formulent dans un registre symbolique au T1, ce registre de formulation concerve une stabilité dans les différentes séquences d'échanges. Autour de ce symbolisme actualisé au T1 s'organisent les modifications apportées au message, aux T2 et T3. Or ce qui nous paraît important à relever dans les différents registres utilisés, c'est le traitement que fait l'enfant en fonction cette fois de toute une "syntaxe" sous-jacente au registre actualisé en rapport aux précisions amenées au message pour rendre compte au lecteur. Et enfin, les registres symboliques utilisés recontrent chez les lecteurs une pertinence sémantique, aux inférences communes chez les enfants. En d'autres termes le souci du lecteur dans ce contexte n'est certainement pas la recherche d'une convention d'écriture symbolique mais bien la compréhension progressive du sens de la composition produite. Ce dernier constat nous paraît essentiel : car, il s'agit pour chaque protagoniste de faire une double <u>identification</u> :

- Une lecture de la situation par les deux enfants (avec l'aide de l'expérimentateur) : règles du jeu, statut des joueurs, matériel.
- Une formulation de la composition effectuée, au moyen de systèmes symboliques permettant de justifier l'écriture.

A ce niveau, nous observons donc qu'il y a une <u>double opération</u> : l'une qui consiste dans la mise en relation des différentes quantités en jeu dans le problème (les gains et la perte), et l'autre qui est la formulation en fonction des données ainsi extraites de la situation à travers les représentations symboliques de l'écrivain. Autrement dit cette représentation infère à la fois à des registres symboliques différenciés et procède de ces mêmes registres à des fins de codification en terme d'écriture qui ne sont certainement pas réductibles à une simple association entre les signifiés des opérations et les signifiants appris.

L'évolution des enfants écrivains classés en C1 (ou dans d'autres catégories) tomoigne manifestement de cette double opération puisque leur démarche donnent lieu à la relance du T" :

- A l'exemple du couple Math. et Syl.,
  Syl., note 3 (à T1, C1); ensuite, elle dit bien "il faut que je marque ... il faut que j'y écrive", en notant sur son message 5+4-6=3 (à T2, $C_{3\ 3}$). Elle identifie bien une autre composition et cette composition passe par l'écriture arithmétique.

- Un autre exemple, Francis (J) au T1, il est classé $C_{3\ 1}$ en écrivant 6-1=5, ce qui donne lieu à la relance au T2, il procède à une recomposition de la façon suivante 5x1 (en se trompant sur le signe de la transformation) il barre et continue 5+1-2, il rebarre encore une fois; et enfin il finit par faire 5+1=6-1=5 (classé en $C_{3\ 2}$). De la même façon, Chris. note au T1 8 (bilan) isolé sur som message à Sandra, après la relance (T2), elle formule 6+5=11 pour signifier les gains (et l'aspect positif); ensuite elle recompose l'ensemble des quantités 11-3=8 (classé $C_{3\ 1}$).

Avec ces exemples nous observons une puissante activité de reformulation qui implique toute une série d'opérations intermédiaires attestant d'une mise en oeuvre opératoire sur des procédures de symbolisation.
En reformulant à la suite de la relance, les écrivains procèdent à une relecture commune (avec le lecteur du message) de la situation problème, et une recomposition en opérant sur les quantités en jeu. Ce contexte d'interaction entre les deux interlocuteurs permet la reformulation se traduisant par les modifications (déjà évoquées) des représentations symboliques.
Autrement dit, c'est une réorganisation séquentielle de la composition, au sens d'une microgenèse. Il s'agit bien d'une double opération cognitive sur différents systèmes de significations (les données extraites de la situation et leur formulation).
Souvent cette double opération n'est pas reconnue.

BIBLIOGRAPHIE

BALACHEFF N.,

Preuve et démonstration en mathématiques au collège. **Recherches en didactiques des mathématiques**, 1982, III, 3, 261-304.

BRESSON F.,

Réflexions sur les systèmes de représentation, **Sémiologie graphique**, 73-74, 7-11.

BRONCKART J.P.,

Théories du langage, Bruxelles, Dessart et Mardaga, 1977.

BROUSSEAU G.,

Les obtacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In : VANHAMME W. et J. (eds), La problématique et l'enseignement de la mathématique. Comptes-rendus de la 28ème rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM). Louvain-La-Neuve, 5-12 août 1976.

BROUSSEAU G.,

Etude locale des processus d'acquisition en situations scolaires, **Enseignement élémentaire des mathématiques**, IREM de Bordeaux, 18, 1978.

BROUSSEAU G.,

Problèmes de didactique des décimaux, **Recherche en Didactique des mathématiques**, 1980, I, 1 et 1981, II, 1.

BRUN J.,

La représentation symbolique d'opérations additives en situation d'interaction et de communication. Actes du cinquième colloque du groupe Psychology of mathematics education. Grenoble, 13-18 juillet 1981.

BRUN J., CONNE F.,

Approches en psychopédagogie des mathématiques. **Cahiers de la Section des Sciences de l'Education**, n° 12, 1979. Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education de l'Université de Genève.

BRUN J., SCHUBAUER-LEONI M.L.,

Recherches sur les activités de codage d'opérations additives en situation d'interaction sociale et de communication. **Cahiers IMAG**, Université de Grenoble, mars 1981.

BRUN J., SCHUBAUER-LEONI M.-L.,

Représentations symboliques d'opérations additives en situation d'interaction sociale : le problème de la catégorisation des procédures de symbolisation mises en oeuvre dans les productions écrites des élèves. Université de Genève. 1982.

CHARRIERE G.,

cité dans : **Approcher la mathématique à cinq ans.** Département de l'Instruction Publique, Genève, juin 1983.

CHASTAING M.,

Jouer n'est pas jouer, **Journal de psychologie normale et pathologique**, 3, 1959, 303-326.

CHEVALLARD Y.,

La transposition didactique. Cours de la première Ecole d'été de didactique des mathématiques. Chamrousse, 1980 (à paraître).

CHEVALLARD Y., JOHSUA M.A.,

Un exemple d'analyse de la transposition didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**, 3, 2, 1982.

COMITI C., BESSOT A., PARISELLE C.,

Analyse du comportement d'élèves de cours préparatoire confrontés à une tâche de construction d'un ensemble équivalent à un ensemble donné. **Recherches en didactique des mathématiques**, 1, 2, 1980.

CONNE F.,

Recherche sur la lecture de l'écriture équationnelle chez des enfants de 7 ans. Rapport de recherche au Fonds National de la Recherche Scientifique, 1979.

CONNE F.,

La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire. Thèse de doctorat. Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education, Université de Genève, 1981.

DROZ R., PASCHOUD J.,

Le comptage et la procédure "(+1) itérée" dans l'exploration intuitive de l'addition. **Revue suisse de psychologie**, 40, 3, 1981.

FISCHER J.P.,

L'enfant et le comptage. **Recherches en didactique des mathématiques**, 2, 3, 1981, 277-302.

FREUDENTHAL H.,

Notation "Mathématique", in : **Encyclopaedia Universalis**, 1968, vol. 11, 908-914.

GALIFRET-GRANDJON N.,

Naissance et évolution de la représentation chez l'enfant, Paris, Presss Universitaires de France, 1981.

KAMII C.,

L'arithmétique en première primaire sans crayons, **Math-Ecole**, n° 106, 1983.

LABORDE C.,

Langue naturelle et écriture symbolique. Thèse d'Etat, Université de

Grenoble, 1982.

MELJAC C.,
Décrire, agir et compter. L'enfant et le dénombrement spontané : une introduction à la psychopédagogie du nombre, Paris, Presses Universitaires de France, 1979.

MOSCOVICI S.,
Le jour de fête du cordonnier, in : **Pourquoi la mathématique**, Paris, collection 10/18, 1974.

PERES J., JOUSSON G., REMY A.,
Etudes en Didactique des mathématiques. **Cahiers de l'IREM de Bordeaux**, 1980.

PERRET J.-F.,
Mathématique et réalité. Sur quoi portent les activités mathématiques à l'école primaire ? Institut Romand de Documentation Pédagogique, référence 82.1073, Neuchâtel, 1982.

PERRET-CLERMONT A.-N.,
La construction sociale de l'intelligence dans l'interaction sociale, Berne, Peter Lang, collection Exploration, 1979.

PERRET-CLERMONT A.-N., BRUN J., CONNE F., SCHUBAUER-LEONI M.-L.
Décontextualisation et recontextualisation du savoir dans l'enseignement des mathématiques à de jeunes élèves. **Interactions Didactiques**, Universités de Genève et Neuchâtel, 1, juillet 1982.

PERRET-CLERMONT A.-N., BRUN J., SAADA E.H., SCHUBAUER-LEONI M.-L.,
Learning : A social actualization and reconstruction of knowledge. In : TAJFEL H. (ed.), **The social dimension**, Cambridge University Press, London, 1984.

PIAGET J., SZEMINSKA A.,
La genèse du nombre chez l'enfant, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1ère édition 1941, 3ème édition 1964.

PIAGET J.,
Recherches sur la contradiction, in : **Etudes en épistémologie génétique**, tome 2 : Les relations entre affirmations et négations, Paris, Presses Universitaires de France, 1974.

SAADA-ROBERT M.,
Procédures d'actions et significations fonctionnelles chez des enfants de deux à cinq ans, **Archives de Psychologie**, Genève, 182, 1979.

SASTRE G., MORENO M.,
Représentation graphique de la quantité. **Bulletin de psychologie**, n° spécial, janvier-février 1977.

SASTRE G., MORENO M.,
Descubrimiento y construccion de conocimientos, Gesida, collection Hombre y Sociedad, Barcelone, 1980.

SCHUBAUER-LEONI M.L., PERRET-CLERMONT A.-N.,
Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs, **Recherches en didactique des mathématiques**, 1, 3, 1980, 297-343.

SCHUBAUER-LEONI M.L., PERRET-CLERMONT A.-N.,
Construction sociale d'écritures symboliques en deuxième primaire (opérations additives). **Interactions didactiques**, Université de Genève et Neuchâtel, 4, 1984.

SCHUBAUER-LEONI M.-L., PERRET-CLERMONT A.-N.,
Interactions sociales dnas l'apprentissage de connaissances mathématiques chez l'enfant, in : MUGNY G. (ed.), **Psychologie sociale du développement cognitif**, Berne, Peter Lang, collection Exploration, (à paraître).

VERGNAUD G.,
Activité et connaissance opératoire, **Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement publique (APMEP)**, 307, 1977.

VERGNAUD G.,
L'enfant, la mathématique et la réalité, Berne, Peter Lang, collection Exploration, 1981.

VERGNAUD G., DURAND C.,
Structures additives et complexité psychogénétique, **Revue française de Pédagogie**, 36, 1976.

VERRET M.,
Le temps des études, Thèse de sociologie. Université Paris V, 1974. Atelier de reproduction des thèses de Lilles III, diffusion Librairie Champion, Paris, 1975.

Liste des publications INTERACTIONS DIDACTIQUES:

No 1 Décontextualisation, recontextualisation du savoir dans l'enseignement des mathématiques à de jeunes élèves, juillet 1982.

No 2 Processus psychosociologiques, niveau opératoire et appropriation de connaissances, avril 1982.

No 3 A paraître.

No 4 Construction sociale d'écritures symboliques en deuxième primaire (opérations additives), avril 1984.

No 5 Formulations écrites et résolution de problèmes additifs. Analyse de leur élaboration et de leur contenu. Juillet 1984.